Листок 3

Определение: Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $B \subset X$ называется нигде не плотным, если $\mathrm{Int}(\overline{B}) = \emptyset$. Эквивалентно, B нигде не плотно, если в каждом непустом открытом множестве $U \subset X$найдется такое непустое открытое подмножество $V \subset U$, что $V \cap B = \emptyset$.

Задача 1.

(а) (*Теорема Бэра*) Пусть X – полное метрическое пространство и $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ счетное семейство нигде не плотных множеств. Докажите, что $X \setminus \bigcup X_n$ плотно в X. Заключите, что (непустое) метрическое пространство не может быть представлено в виде счетного объелинения нигде не плотных множеств.

(б) Докажите, что не существует нормы на пространстве $\mathbb{C}[z]$, относительно которой $\mathbb{C}[z]$ банахово.

Указание: не случайно это два пункта одной задачи.

Задача 2.

(а) Пусть X нормированное пространство и Y – банахово. Докажите, что $B(X, Y)$ (с операторной нормой) банахово.

(б) Докажите, что не банахово нормированное пространство не может быть рефлексивным (см. определение в листке 2).

Задача 3. Пусть X, Y банаховы пространства, $T \in B(Y^*, X^*)$. Обязательно ли найдется $S \in B(X, Y)$, такой что $S^* = T$?

Задача 4. Приведите пример пространства H со скларяным произведением, замкнутого подпространства H_0 в нем и вектора $x \in H$, для которого не существует ближайшего вектора в H_0.

Указание: H – подпространство в l_2, $x = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$.

Задача 5. Приведите пример пространства H со скалярным произведением и его (собственного) замкнутого подпространства H_0, таких что $H_0^{\perp} = 0$ и как следствие $H \neq H_0 \oplus H_0^{\perp}$