Предел последовательности, число e

1. Найдите такое $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, что $2^n > n^{100}$.
2. Найдите предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.
3. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.
4. Найдите пределы последовательностей: (а) $a_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{n}$; (б) $a_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots+\sqrt{1}}}}}_{n}$.
5. Существует ли предел последовательности $a_n = \sin n$?
6. а) Докажите, что, если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = a$.
(б) Покажите, что обратное неверно.

Частичным пределом последовательности называется предел любой ее подпоследовательности. Верхним и нижним пределами последовательности называются следующие величины

$$\varlimsup_{k\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k, \qquad \varliminf_{k\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k.$$

7. Докажите, что верхний и нижний пределы последовательности – это ее максимальный и минимальный частичные пределы.

8. Числами Фибоначчи называется последовательность чисел $\{f_n\}$, заданная рекуррентно: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, и найдите его.

9. Докажите, что $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ при $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > -1$ (неравенство Я. Бернулли).

10. (а) Докажите, что последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает.
(б) Докажите, что последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится. Предел этой последовательности обозначают

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

11. Докажите, что число $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ равно пределу последовательности

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

12. Докажите иррациональность числа e. (Указание: Предположите обратное. Оцените величину $|e - a_n|$ и докажите, что она не может быть рациональной.)