Формула Тейлора и исследование функции

1. Докажите формулу Тейлора для многочленов: если $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, то при любом $x_0 \in \mathbb{R}$

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$2^{\times}$. Разложите в $x_0 = 0$ следующие функции по формуле Тейлора с остаточным членом $O(x^n)$ (а) e^x и a^x; (б) $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ и $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; (в) $\cos x$ и $\sin x$; (г) $(1+x)^{\alpha}$.

$3^{\times}$. Напишите первые n членов разложения Тейлора при $x_0 = 0$ для следующих функций
(а) $\ln(1+x)$; (б) $\operatorname{arctg} x$; (в) $\arcsin x$; (г) $\frac{1}{1-2x+2x^2}$.

4. Выпишите первые три члена разложения Тейлора при $x_0 = 0$ для следующих функций (а) $\frac{1}{\cos x}$; (б) $e^{\sin x}$; (в) $\sqrt{\cos x}$.

5. Как выражаются разложения Тейлора функций $f+g$, fg; f^{-1}; $f \circ g$ через разложения Тейлора функций f и g?

6. Найдите 2023-ю производную $f^{(2023)}(0)$ функции

$$f(x) = \sin(x^{823} + x^{600}).$$

7. Вычислите пределы: (а) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$; (б) $\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (в) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}$.

8. Найдите рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов a_k в разложении

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

(*Указание:* $(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^2 x + 1$.)

9. Докажите правило Лопиталя. Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ и $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на (a,b) и $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$ и $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A$, $x \to a+0$. Тогда, если $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to a+0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A, \quad x \to a+0.$$

10^*. Пусть $f \in C^n(\mathbb{R})$ – n раз непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Пусть $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ и $M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$ – конечные величины, а $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Покажите, что
(а) при $n = 2$ выполнено $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$;
(б) в пункте (а) $\sqrt{2}$ не может быть замененен меньшим числом;
(в) при $n > 2$ выполнено $M_k \leqslant 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$.

Задачи с крестиками “×” ненужно сдавать, если вы ранее знали их решения.