# Интеграл, плоские параметрические кривые

1. Найдите неопределенные интегралы: (а) $\int x^\alpha\,dx$; (б) $\int \ln x\,dx$; (в) $\int x^2e^x\,dx$.

2. Используя интеграл, найдите пределы:
(а) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n)^2}\right)$; (б) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha>0$; (в) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

3. Докажите, что, если существует $I_1=\int_a^b f(x)dx$, то существует $I_2=\int_a^b|f(x)|dx$ и $I_1\leqslant I_2$.

4. Докажите, что монотонная и ограниченная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

5. Покажите, что функция $f\in C^1[a,b]$ может быть представлена как разность двух неубывающих функций.

6. Пусть $D(x)$ и $R(x)$ – функции Дирихле и Римана, соответственно. Существуют ли интегралы $\int_a^b D(x)dx$ и $\int_a^b R(x)dx$? Если существуют, то чему они равны?

*Рассмотрим отображение $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(x(t),y(t))$. Предположим, что $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы достаточное число раз, их производные по $t$ обозначим $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$. Вектор $v(t)=\dot{\gamma}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t))$ называется вектором скорости. Отображение $\gamma$ называется гладкой кривой, если $v(t)\neq 0$, $t\in\mathbb{R}$.*

7. Найдите уравнение касательной к кривой $\gamma$ в точке $(x(t_0),y(t_0))$, $t_0\in(a,b)$. *Напомним, что касательной называется такая прямая $L$, что расстояние от точки $(x(t),y(t))$ до $L$ равно $o(t-t_0)$, $t\to t_0$.*

*Длиной кривой $\gamma[a,b]$ называется число $l_\gamma=\int_a^b\|v(t)\|dt$, $\|v(t)\|=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}$.*

8. Докажите, что при допустимой смене параметризации длина кривой не меняется, то есть, если $h:[\alpha,\beta]\to[a,b]$, $h(\alpha)=a$, $h(\beta)=b$, $h'(\tau)>0$, $\tau\in[\alpha,\beta]$, то $l_{\gamma\circ h}=l_\gamma$.

9. (а) Пусть плоская кривая задана уравнением $y=f(x)$, $x\in[a,b]$. Докажите, что длина кривой равна

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

(б) Докажите, что длина кривой $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[a,b]$, заданной в полярных координатах, равна

$$s=\int_a^b\sqrt{r^2(\varphi)+(r')^2(\varphi)}d\varphi.$$

10. Найдите длину (а) единичной окружности; (б) участка параболы.

11. Покажите, что на всякой гладкой кривой $\gamma$ можно ввести параметр $s$, такой, что $s=l_\gamma[0,s]$. Такой параметр называется *натуральным*. Докажите, что параметр $t$ – натуральный тогда и только тогда, когда $\|\dot{\gamma}(t)\|\equiv 1$.

12. Пусть $s$ – натуральный параметр кривой $\gamma(s)$. Положим: $v(s)=\gamma'(s)$, $a(s)=v'(s)$. Докажите, что векторы $v(s)$ и $a(s)$ перпендикулярны.

13. Функция $\kappa(s)=|a(s)|$ называется *кривизной* кривой $\gamma$. Положим, что $n(s)=a(s)/\kappa(s)$. Докажите, что $n'(s)=-\kappa(s)v(s)$ (*формула Френе*).

14. Пусть кривизна кривой $\gamma$ в точке $\gamma(s_0)$ отлична от нуля, то есть $\kappa(s_0)\neq 0$. Найдите окружность $S$, для которой $\|\gamma(s)-S(s)\|=o((s-s_0)^2)$. Предполагается, что $s$ – натуральный параметр окружности $S$.