Ряды: числовые и функциональные

Числовые ряды.

1. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Докажите, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходтися ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

2. Исследуйте следующие ряды на сходимость: (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$, $\delta > 0$; (б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; (в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln \ln n}$.

3. Докажите интегральный признак сходимости ряда. Пусть $f(x)$ – неотрицательная строго монотонно убывающая на $[1, +\infty)$ функция. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{y\to\infty} \int_1^y f(x)\, dx$.

4. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$ при различных α.

Степенные ряды.

5. Докажите, что радиус R сходимости степенного ряда может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если предел сущестует.

6. Придумайте степенные ряды, области сходимости которых (а) $\{0\}$; (б) $[-R, R]$; (в) $[-R, R)$; (г) $(-R, R)$.

7. С помощью интегрирования рядов для производных найдите разложения Тейлора для обратных тригонометрических функций (а) $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$; (б) $\arcsin x$, $\arccos x$.

8. Найдите суммы рядов: (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

9. Докажите, что дзета-функция Римана $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

10. Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции f, ряд Тейлора которой (а) расходится в каждой точке, кроме нуля; (б) сходится всюду, но не к функции f.

Критерий Лебега.

Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет меру ноль, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся счётное объединение интервалов суммарной длины меньше чем ε, содержащее X. Назовём колебанием функции f в точке x величину $\omega(f, x) = \inf_{U \ni x} \omega(f, U)$ по всем открытым окрестностям U.

11. (а) Докажите, что f разрывна в точке x тогда и только тогда, когда $\omega(f, x) > 0$.

(б) Докажите, что у интегрируемой на $[a, b]$ функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ множество точек разрыва x с $\omega(f, x) > \delta$ имеет нулевую меру для любого $\delta > 0$.

(в) Докажите, что ограниченная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва имеет меру ноль.