Функции многих переменных и другие задачи

Связным множеством называется множество X, которое нельзя представить в виде дизъюнктивного объединения $X_1 \sqcup X_2$ двух открытых в X (в индуцированной топологии) множеств с пустым пересечением. Множество X называется линейно связным, если любые две его точки $x, y \in X$ могут быть соединены непрерывной кривой γ:

$$\gamma : [a,b] \to X, \qquad \gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y,$$

образ которой целиком лежит в X.

1. (а) Опишите все связные подмножества прямой.

(б) Докажите, что линейно связное множество связно.

(в) Приведите пример связного, но не линейно связного множества.

2. Докажите, что область (открытое и связное множество в $\mathbb{R}^n$) линейно связна.

3. Докажите, что функция $f(x,y)$, имеющая ограниченные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой выпуклой области G, равномерно непрерывна в этой области.

4. Докажите, что, если функция $f(x,y)$ в некоторой области G непрерывна по x при каждом фиксированном y и имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial u}{\partial y}$, то эта функция непрерывна в области G.

5. Пусть $f(x,y)$ – непрерывно дифференцируемая функция в некоторой области G и $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ в области G. Верно ли утверждение, что функция $f(x,y)$ не зависит от y в области G?

6. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – гладкое отображение, удовлетворяющее системе уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

(а) Покажите, что якобиан такого отображения равен нулю в некоторой точке тогда и только тогда, когда матрица $f'(x)$ в этой точке нулевая.

(б) Покажите, что если $f'(x) \neq 0$, то в окрестности точки x определено обратное отображение f^{-1}, которое также удовлетворяет системе уравнений Коши-Римана.

7. Пусть U – область в $\mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$, $x \in U$. Докажите, что множество всех касательных к графику функции f полностью определяет функцию f. Более того, множество касательных прямых может быть параметризовано как $y = px - g(p)$, то есть в качестве параметра p можно взять тангенс угла наклона касательной, а $g(p) = \hat{f}(p)$ – функция от p, определенная на открытом множестве $\hat{U}$ значений параметра p. Эта функция называется *преобразованием Лежандра* функции f.

8. В предположениях предыдущей задачи докажите, что $\hat{f}'' > 0$ для всех $x \in \hat{U}$.

9. Вычислите преобразование Лежандра функций (а) $f(x) = e^x$, (б) $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 1$.

10. Докажите неравенство Юнга: $f(x) + \hat{f}(p) \geqslant px$. Выведите отсюда, что

$$\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta} \geqslant px, \quad \text{если} \quad \alpha, \beta > 1, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

11. Проверьте, что $\hat{\hat{f}} = f$.