Листок 3.

Задача 1. Рассмотрим сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и через N обозначим «северный полюс» $(0, 0, 1)$. Отображение, которое всякой точке $A \neq N$ сферы сопоставляет точку B плоскости OXY, которая является пересечением луча NA с плоскостью, называется стереографической проекцией.

(a) Выразите координаты точки B через координаты точки A и наоборот.

(b) Найдите все кривые на сфере, которые при стереографической проекции переходят в прямые и окружности на плоскости.

(c) Инверсией плоскости относительно единичной окружности с центром в начале координат O называется отображение, сопоставляющее всякой точке $A \neq O$ такую точку A' на луче OA, что $OA \cdot OA' = 1$. Какое отображение сферы соответствует инверсии плоскости OXY при стереографической проекции?

(d) Проверьте, что стереографические проекции из точек $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$ задают гладкий атлас из двух карт. Эквивалентен ли этот атлас атласу с картами, задаваемыми отображениями ортогонального проектирования на плоскости OXY, OYZ и OXZ?

Задача 2. Пусть M — непустое топологическое многообразие размерности $n \geq 1$. Предположим, что на M существует гладкий атлас.

(a) Докажите, что на M существует еще по крайней мере один атлас, неэквивалентный исходному,

(b) Докажите, что на M можно построить континуальное множество попарно неэквивалентных гладких атласов.

Задача 3. Обозначим через $G(k, n)$ множество всех k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$.

(a) Пусть $\mathbb{R}^n = W \oplus V$ и $\dim W = k$, $\dim V = n - k$. Докажите, что линейное k–мерное подпространство, которое тривиально пересекается с V, является графиком линейного отображения из W в V.

(b) В условиях пункта (a) через U_W обозначим все линейные k–мерные подпространства, которые тривиально пересекается с V. Выберем базис в W и V. Тогда всякому $P \in U_W$ сопоставляется матрица $\varphi_W(P)$ (размера $k \times (n-k)$) соответствующего линейного отображения из W в V. Принимая пары (U_W, φ_W) за гладкие карты введите на $G(k, n)$ структуру гладкого многообразия.

Многообразие $G(k, n)$ называется многообразием Грассмана.

Задача 4. Рассмотрим группы: GL_n – группа невырожденных линейных преобразований $\mathbb{R}^n$, SL_n – группа невырожденных линейных преобразований $\mathbb{R}^n$ с единичным определителем, O_n – группа невырожденных линейных преобразований $\mathbb{R}^n$, сохраняющих скалярное произведение.

(a) Проверьте, что перечисленные группы являются гладкими подмногообразиями в $\mathbb{R}^{n^2}$ и найдите их размерность.

(b) Для каждого из этих многообразий опишите касательные пространства в единице.

(c) Проверьте, являются ли рассматриваемые многообразия связными, и в случае отрицательного ответа опишите все компоненты связности.

Задача 5. Пусть отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определено следующим образом: $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $f(x) = 1$ при $x \geq 0$. Докажите, что для каждого x найдутся такие гладкие карты (U, φ) и (V, ψ), содержащие x и $f(x)$ соответственно, что $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ является гладким отображением из $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ в $\psi(V)$. В чем отличие этого свойства f от требуемого в определении гладкого отображения многообразий?

Задача 6. Пусть $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ — гладкое отображение и для некоторого целого m выполняется $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$ для всех $x \neq 0$ и всех $\lambda > 0$. Докажите, что отображение $F\colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^k$, порождаемое функцией f, является гладким.

Задача 7. Пусть M^k — гладкое многообразие и $f\colon M^k \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует гладкая функция $g\colon M^k \to \mathbb{R}$, с которой выполняется неравенство

$$\sup_{p \in M^k} |f(p) - g(p)| < \varepsilon.$$

Задача 8. Предположим, что существует гладкое вложение M^k в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что существует гладкое вложение TM^k в $\mathbb{R}^{2n}$.

Задача 9. Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Рассмотрим отображение $F(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$ из $\mathbb{R}$ в тор $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. Покажите, что F является погружением и $F(\mathbb{R})$ всюду плотно в $\mathbb{T}^2$. Объясните, почему F не является вложением.

Задача 10. Проверьте, что отображение g из $\mathbb{RP}^2$ в плоскость $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ в $\mathbb{R}^6$, заданное формулой

$$g([x_1, x_2, x_3]) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6),$$

где

$$y_1 = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad y_2 = \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad y_3 = \frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$
$$y_3 = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad y_4 = \frac{x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad y_6 = \frac{x_3 x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

является вложением $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{R}^5$.

Задача 11. Докажите, что гладкое компактное многообразие размерности n нельзя вложить в $\mathbb{R}^n$.

Задача 12. Пусть M – гладкое компактное многообразие и $f\colon M \to \mathbb{R}$ – гладкая функция. Докажите, что существует такое вложение M в $\mathbb{R}^N$, при котором f оказывается ограничением какой-то координаты на M.

Задача 13. Приведите пример гладкой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с несчетным множеством критических значений.

Задача 14. Используя стереографическую проекцию (сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ на плоскость OXY) постройте по многочлену $P(z)$ (здесь $z = x + iy$) соответствующее ему гладкое отображение S^2 в S^2. От чего зависит степень $(\operatorname{mod} 2)$ этого отображения?

Задача 15. Отображение $f\colon SO(3) \to SO(3)$ задано формулой $f(X) = X^4$. Гомотопно ли это отображение тождественному?