НМУ, II курс, 09.11.2023

Листок 4.

Задача 1. Какие из следующих векторных полей на прямой можно перевести друг в друга диффеоморфизмом:

$$(2\sin x)\partial_x, \quad (\sin^2 x)\partial_x, \quad (\sin 2x)\partial_x?$$

Задача 2. Пусть $U = \{(x, y) \colon x > 0, y > 0\}$ и $F(x, y) = (xy, y/x)$. Проверьте, что отображение F — диффеоморфизм $U \to U$ и найдите F_*V и F_*W, где

$$V = x\partial_x + y\partial_y, \quad W = y\partial_x.$$

Задача 3. Найдите все диффеоморфизмы $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сохраняющие векторное поле

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i}.$$

Задача 4. Выпрямите в окрестности нуля векторное поле

(a) $x\partial_x + (1 + y)\partial_y$,

(b) $(x - y)\partial_x + (x + y + 1)\partial_y$.

Задача 5. Для векторных полей V и W на $\mathbb{R}^3$ вычислите скобку Ли $[V, W]$:

(a) $V = x\partial_x - y\partial_y$, $W = y\partial_x - z\partial_y$,

(b) $V = x\partial_y - y\partial_x$, $W = x\partial_y + y\partial_x$.

Задача 6. Найдите все векторные поля на $\mathbb{R}^n$, коммутирующие с векторным полем

(a) ∂_{x_1}, (b) $\partial_{x_1} + \ldots + \partial_{x_n}$.

Задача 7. Удалим из единичной сферы S^2, заданной уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, полюса $(0, 0, \pm 1)$. Пусть X – векторное поле, состоящее из векторов единичной длины, касательных к меридианам в направлении с севера на юг, а Y – векторное поле, состоящее из векторов единичной длины, касательных к параллелям в направлении с запада на восток. Запишите X и Y в локальных координатах (широта, долгота) и найдите коммутатор $[X, Y]$.

Задача 8. Докажите, что линейная оболочка векторных полей

$$X = y\partial_z - z\partial_y, \quad Y = z\partial_x - x\partial_z, \quad Z = x\partial_y - y\partial_x,$$

является алгеброй Ли, изоморфной алгебре Ли $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением.

Задача 9. Опишите векторные поля на $\mathbb{R}^n$, фазовые потоки которых сохраняют (a) расстояние, (b) объем. Докажите, что такие векторные поля образуют алгебру Ли относительно коммутатора.

Задача 10. Пусть v – гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $v_r(x) = \langle v(x), x\rangle |x|^{-1}$ радиальную составляющую, а через $v_\varphi = v - v_r|x|^{-1}x$ угловую составляющую v. Предположим, что $v_r \geq |x|$ и $|v_\varphi| \leq |x|^{-1}$. Докажите, что для всякого решения x_t уравнения $\dot{x} = v(x)$ такого, что $x_0 \neq 0$, существует предел $\lim_{t\to+\infty} \frac{x_t}{|x_t|}$. Всякая ли точка на единичной сфере обязана быть пределом для какого-то решения?