

Листок 5.

Задача 1. Найдите значение формы $(3dy \wedge dz - 5dz \wedge dx)(\xi, \eta)$ на векторах

$$\xi = (3, 4, 5), \quad \eta = (1, 0, 1).$$

Задача 2. Пусть (P, Q, R) — гладкое векторное поле на \mathbb{R}^3 . Вычислите

$$d(Pdx + Qdy + Rdz), \quad d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy).$$

Задача 3. На \mathbb{R}^3 задана форма $\omega = dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$. Найдите какую-нибудь форму α , для которой $\omega = d\alpha$.

Задача 4. Пусть v, u — гладкие векторные поля и ω — дифференциальная 1 форма. Докажите равенство:

$$d\omega(v, u) = v(\omega(u)) - u(\omega(v)) - \omega([v, u]).$$

Задача 5. На многообразии $GL_n(\mathbb{R})$ найдите такую отличную от нуля дифференциальную форму ω степени 1, что для всякого отображения вида $f(X) = AX$, где $X, A \in GL_n(\mathbb{R})$, выполнено равенство $f^*\omega = \omega$.

Задача 6. Пусть фазовый поток g_t порожден векторным полем $H_y \partial_x - H_x \partial_y$ на плоскости. Докажите, что $g_t^*(dx \wedge dy) = dx \wedge dy$.

Задача 7. Пусть g_t — семейство гладких отображений многообразия M в многообразии N , причем $g_t(z)$ гладко зависит от (t, z) , $\frac{d}{dt}g_t(z) = X(t, g_t(z)) \in TN_{g_t(z)}$ и ω — дифференциальная k форма. Докажите, что

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t^* \omega = d(g_t^*(i_X \omega)) + g_t^*(i_X d\omega),$$

где $i_X \omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \omega(X, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$.

Задача 8. (Лемма Пуанкаре) Используя предыдущую задачу докажите, что на стягиваемом многообразии (M — стягиваемое многообразие, если существует гладкое отображение $g: M \times [0, 1] \rightarrow M$ такое, что $g(x, 1) = x$ и $g(x, 0) = x_0$ для некоторого $x_0 \in M$) всякая замкнутая форма ω (т.е. $d\omega = 0$) является точной, т.е. $\omega = d\alpha$.

Задача 9. Пусть ω — дифференциальная k -форма на \mathbb{R}^n и ξ_1, \dots, ξ_{k+1} — вектора, отложенные от точки x . Обозначим через $\Pi_\varepsilon = \Pi(\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{k+1})$ параллелепипед, натянутый на вектора $\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{k+1}$. Докажите, что

$$d\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon^{k+1}} \int_{\partial \Pi_\varepsilon} \omega.$$

Задача 10. Пусть

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

(а) Докажите, что ω — замкнутая форма в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(б) Вычислите

$$\int_{S^2} \omega, \quad S^2 = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

(с) Пусть Q — выпуклая область с гладкой границей в \mathbb{R}^3 . Найдите

$$\int_{\partial Q} \omega.$$