Листок 2

ГЕОМЕТРИЯ

Конечные подгруппы $O(3)$, платоновы тела

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 4 задачи. Каждый пункт в задаче 1 рассматривается как отдельная задача. Из задачи 1 только один из пунктов пойдёт в зачёт. Чтобы сдать задачу 4 нужно решить все пункты.

1. В сферу $\mathbb{S}^2$ вписана

а) (1) правильная шестиугольная пирамида; (2) двойная правильная шестиугольная пирамиды (т.е. объединение двух правильных шестиугольных пирамид с общим основанием и вершинами в полюсах сферы);

б) (1) правильная шестиугольная призма; (2) правильная пятиугольная усеченная пирамида.

Найдите группу симметрий (т.е. изометрий) этой фигуры и ее группу движений. Как соотносится ответ с теоремой о конечных подгруппах в $SO(3)$?

2. а) Докажите, что прямоугольник, две противоположных стороны которого представляют собой два противоположных ребра правильного икосаэдра, является *«золотым прямоугольником»*, т.е. его стороны находятся в отношении $(1+\sqrt{5})/2$. Число $\varphi := (1+\sqrt{5})/2$ называется *золотым сечением.*

б) Убедитесь, что 12 точек $(\pm\varphi, \pm1, 0), (0, \pm\varphi, \pm1), (\pm1, 0, \pm\varphi)$ расположены в вершинах правильного икосаэдра (в частности, икосаэдр действительно существует). Выведите отсюда также существование додекаэдра.

3. Докажите, что если правильный многогранник имеет символ Шлефли $\langle p, q\rangle$, то $1/p+1/q > 1/2$. Выведите отсюда, что любой правильный многогранник – одно из 5 платоновых тел.

4. а) Докажите, что сумма углов выпуклого многогранника в $\mathbb{E}^3$ равна $2\pi(\text{Р}-\text{Г})$.

б) Докажите, что сумма углов выпуклого многогранника в $\mathbb{E}^3$ равна $2\pi(\text{В}-2)$.

в) Докажите теорему об эйлеровой характеристике выпуклого многогранника в $\mathbb{E}^3$.

г) Верна ли теорема об эйлеровой характеристике для невыпуклых многогранников в $\mathbb{E}^3$? Если да, то докажите её, если нет, то постройте контрпример.

5. Существует ли в группе движений куба подгруппа, изоморфная группе движений правильного тетраэдра?

6. Существует ли в группе движений додекаэдра подгруппа, изоморфная группе движений куба?

7. В группе движений куба найдите все подгруппы, изоморфные группам $\mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{D}_n$ для всевозможных значений n. Есть ли в ней еще какие-либо подгруппы?