

**Листок 5**  
**ГЕОМЕТРИЯ**  
**Сферическая геометрия**

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 5 задач. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать нужно решить все пункты. Задача со звездочкой приравнивается к двум задачам без звездочки. Во всех задачах этого листка  $a, b, c$  — стороны,  $\alpha, \beta, \gamma$  — противолежащие им углы сферического треугольника. Радиус сферы  $\mathbb{S}^2$  равен 1.

1. (а) Докажите первую теорему косинусов для сферы  $\mathbb{S}^2$ :  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ .  
(б) Докажите вторую теорему косинусов для сферы  $\mathbb{S}^2$ :  $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$ .

2. Докажите, что

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}},$$

где  $p = (a + b + c)/2$ .

3. (а) Докажите, что  $a + b + c < 2\pi$ .

(б) Найдите точную нижнюю и точную верхнюю грань суммы углов равностороннего треугольника на сфере.

4\*. Найдите площадь сферического круга радиуса  $r$  (т.е. области, которая ограничена сферической окружностью радиуса  $r$ ).

5. (а) Докажите что сферическая окружность является также и евклидовой окружностью. Равны ли радиусы этих окружностей, т.е. совпадает ли сферический радиус сферической окружности с евклидовым радиусом евклидовой окружности?

(б) Докажите, что любой сферический треугольник имеет описанную и вписанную окружности.

6\*. Докажите, что радиус  $r$  вписанной окружности и радиус  $R$  описанной окружности сферического треугольника удовлетворяют

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p}}, \quad \operatorname{ctg} R = \sqrt{\frac{\sin(\alpha-s) \sin(\beta-s) \sin(\gamma-s)}{\sin s}},$$

где  $s = (a + b + c - \pi)/2$ .

7. (а) Докажите, что медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

(б) Докажите, что высоты сферического треугольника всегда пересекаются в одной точке.

(в) Верна ли в сферической геометрии теорема Пифагора в виде "сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы"?

8. Пусть медианы и высоты сферического треугольника пересекаются в точках  $M$  и  $H$  соответственно. Может ли оказаться, что  $M = H$ ?

9. (а) Рассмотрим отрезок сферической прямой длины  $\alpha$ . Рассмотрим полюсы всех сферических прямых, пересекающих данный отрезок. Докажите, что рассматриваемые точки замещают множество площади  $4\alpha$ .

(б) Дано несколько отрезков сферических прямых, сумма длин которых меньше  $\pi$ . Докажите, что существует сферическая прямая, не пересекающая ни одного из данных отрезков.

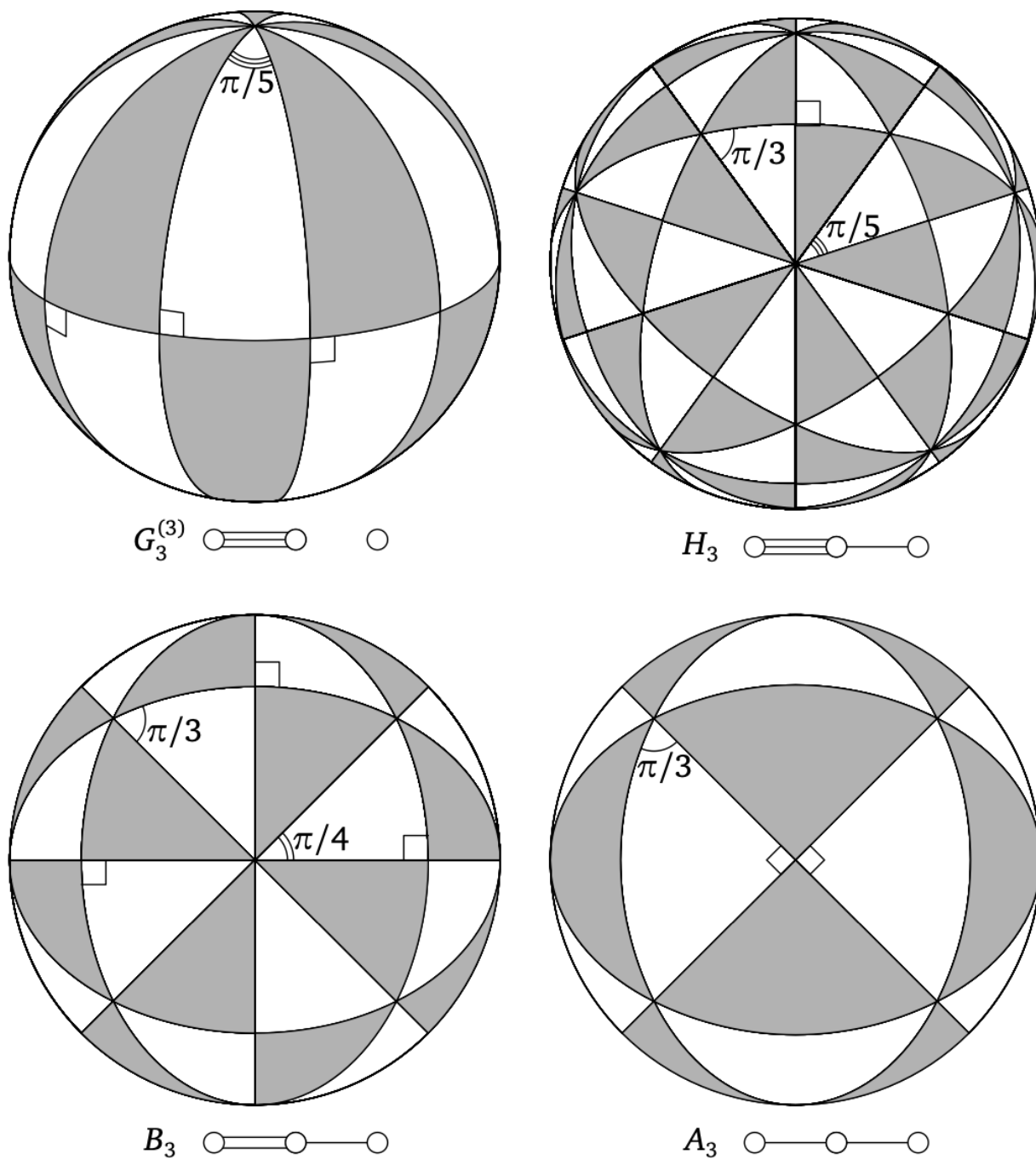


РИС. 1. Четыре замощения Кокстера на сфере.