Упражнения, часть 1

Задачи с отметками # и * сдавать не обязательно — они либо слишком простые и добавлены для контекста, либо не очень простые. Для вхождения листочка в общий зачёт нужно сдать не меньше 1/2 от общего количества задач без звёздочек; две задачи без звёздочки можно заменить на одну со звёздочкой (желательно из той же секции). Для удобства количество задач будет а) чётным; б) указано в конце листочка. Итоговая оценка за курс будет равна доле сданных листочков.

Если не указано, что нужно сделать с утверждением, то его нужно доказать (...или опровергнуть, и указать мне на ошибку; надеюсь, такое будет случаться достаточно редко).

Нотация

Все кольца унитальные и ассоциативные. ${}_RM_S$ обозначает $R-S$-бимодуль, на котором R действует слева, а S справа. Если один из индексов отсутствует, то это просто левый/правый модуль над соответствующим кольцом; стоит заметить, что со второй стороны это всё ещё каноническим образом $\mathbb{Z}$-модуль: например, в задаче 2.1 это используется.

M_R называется плоским, если функтор $M_R \otimes_R -$ сохраняет конечные пределы (точен слева).

M_R называется конечнопорождённым, если он представляется как коядро некоторого морфизма $N_R \to R^n_R$.

M_R называется когерентным, если ядро любого морфизма $R^n_R \to M$ конечнопорождено (иначе говоря: любой конечнопорождённый подмодуль конечнопредставлен, т.е. является коядром некоторого отображения $R^m_R \to R^n_R$).

Кольцо называется нётеровым слева, если класс конечнопорождённых левых модулей замкнут относительно взятия подобъектов.

Кольцо называется когерентным слева, если конечнопорождённые левые модули над ним когерентны. (Достаточно того, чтобы R_R был когерентным).

Аналогично определяются правые версии этих свойств кольца.

1 Критерий Баера (3)

1.1. M_R инъективный $\Leftrightarrow$ для всех правых идеалов $I_R \subset R$ любой морфизм $I_R \to M_R$ продолжается до $R_R \to M_R$.

1.1.1. F_R плоский $\Leftrightarrow$ для любого конечнопорождённого левого идеала ${}_RI$ отображение умножения $F \otimes_R I \to F$ является вложением.

Скажем, что M_R *главно-инъективный*, если для любого *главного* правого идеала Y любой морфизм $Y_R \to M_R$ продолжается до $R_R \to M_R$ (это свойство известно в народе как делимость модуля).

1.2. Классы главно-инъективных и инъективных правых R-модулей совпадают $\Leftrightarrow$ фактормодули инъективных правых R-модулей инъективны $\Leftrightarrow$ правые идеалы в R проективны.

(*) 1.3. Описать моноид (относительно операции прямой суммы) инъективных модулей над конечномерной алгеброй. Подсказка: любой конечномерный модуль над конечномерной алгеброй вкладывается в конечномерный инъективный.

2 Плоские и инъективные модули: замена скаляров (3)

2.1. M_R плоский $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ инъективный над R.

2.2. Пусть ${}_RF_S$ плоский над S, а ${}_RJ_T$ инъективный над R. Тогда $\mathrm{Hom}_R(F, J)$ инъективный над S.

2.3. Пусть ${}_RF_S$ плоский над R, а ${}_SG_T$ плоский над S. Тогда $F \otimes_S G$ плоский над R.

3 Свойства конечности (4)

3.1. R нётерово слева $\Leftrightarrow$ класс инъективных левых R-модулей замкнут относительно копроизведений. Подсказка: использовать критерий Баера — задачу 1.1.

(#) 3.1.1. Класс инъективных левых R-модулей замкнут относительно копроизведений $\Leftrightarrow$ класс инъективных левых R-модулей замкнут относительно фильтрованных копределов.

(*) 3.1.2. R нётерово слева $\Leftrightarrow$ класс инъективных левых R-модулей порождён относительно прямых сумм инъективными левыми R-модулями мощности не больше некоторого кардинала α $\Leftrightarrow$ для любого множества плоских правых R-модулей $\{F_i\}$ естественное преобразование $(\prod F_i) \otimes_R M \to \prod (F_i \otimes_R M)$ мономорфизм.

3.2. R когерентно справа $\Leftrightarrow$ класс плоских левых R-модулей замкнут относительно произведений.

(#) 3.2.2. R когерентно справа $\Leftrightarrow$ для любого множества α левый модуль всех функций из α в R плоский $\Leftrightarrow$ этот модуль плоский для всех α мощности не превышающей мощность R.

3.3. Если R нётерово слева, и ${}_RJ_S$ инъективен над R, то функтор $J \otimes_S -$ переводит плоские левые S-модули в инъективные левые R-модули.

3.4. Если S когерентно справа, и ${}_RJ_S$ инъективен над S, то функтор $\mathrm{Hom}_R(J, -)$ переводит инъективные левые R-модули в плоские левые S-модули.

(*) 3.5. Пусть $S \subset R$ расширение колец, причём R порождено как левый S-модуль конечным набором элементов, коммутирующих с S. Тогда S нётерово слева $\Leftrightarrow$ R нётерово слева.

(#) 3.5.1. В тех же предположениях S артиново слева $\Leftrightarrow$ R артиново слева.

4 Существенные подмодули (4)

Мономорфизм $j : U \hookrightarrow M$ называется существенным вложением (также: существенный подмодуль $U \subseteq_e M$; M is an essential extension of U), если $\mathrm{Im}(j) \cap M' \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля $M' \subset M$.

4.1. Композиция существенных вложений — существенное вложение. Пересечения двух существенных подмодулей — существенный подмодуль. Если W является пуллбэком существенного вложения $j : U \hookrightarrow M$ и произвольного морфизма $f : N \to M$, то морфизм $W \to N$ — существенное вложение.

(#) 4.1.1. Произвольные пересечения существенных модулей не обязательно существенны.

4.2. Критерий инъективности Баера (1.1.) достаточно проверять на существенных идеалах.

4.3. Для любого модуля M существует существенное вложение в инъективный модуль $M \hookrightarrow E(M)$ (такой $E(M)$ называется инъективной оболочкой M). $E(M)$ единственен с точностью до изоморфизма; изоморфизм можно выбрать под M. Это максимальное существенное расширение и минимальное инъективное расширение.

4.3. Пусть существуют мономорфизмы модулей $M \hookrightarrow N$, $N \hookrightarrow M$. Тогда существует изоморфизм инъективных оболочек $E(M) \cong E(N)$.

5 Примеры когерентных колец (2)

(#) 5.0. Свободная коммутативная алгебра $k[\underline{X}]$ на любом множестве переменных когерентна (справа и слева), но не обязательно нётерова. Свободная алгебра $k\langle x, y\rangle$ когерентна, но не нётерова.

5.1. Пусть R — нётерово справа кольцо. Кольцо $O := R\langle x, y\rangle/(y^2, yx)$ когерентно справа, но не нётерово. O нётерово слева $\Leftrightarrow$ R нётерово слева.

5.2. Пусть кольцо R вкладывается в некоторое кольцо с делением D. Если $\mathrm{Ext}^3_R(-,-)$ зануляется на всех парах левых R-модулей, и $Tor^R_2(D_R, -)$ зануляется на всех левых R-модулях, то R когерентно.

(*) 5.3. (Целочисленные) групповые кольца конечнопорождённых свободных групп когерентны. Групповые кольца конечнопорождённых нильпотентных групп когерентны.

Всего задач: 16.