Упражнения, часть 2

Задачи с отметками # и * сдавать не обязательно — они либо слишком простые и добавлены для контекста, либо не очень простые. Для вхождения листочка в общий зачёт нужно сдать не меньше $1/2$ от общего количества задач без звёздочек; две задачи без звёздочки можно заменить на одну со звёздочкой (желательно из той же секции). Для удобства количество задач будет а) чётным; б) указано в конце листочка. Итоговая оценка за курс будет равна доле сданных листочков.

Если не указано, что нужно сделать с утверждением, то его нужно доказать (...или опровергнуть, и указать мне на ошибку; надеюсь, такое будет случаться достаточно редко).

Нотация

Морфизм $j : M \to N$ в Mod$-R$ называется чистым, если для любого коммутативного квадрата, где A, B — конечнопредставлены, существует некоторый s (такой, что диаграмма коммутативна).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s"'] \\ M \arrow[r, "j"] & N \end{tikzcd}$$

Вложение $j : M \to N$ в Mod$-R$ называется алгебраически чистым, если для любой матрицы X в $\mathrm{Mat}_{k\times l}(R)$ и строки z в M^k из того, что линейное уравнение $Xy = j(z)$ разрешимо в N, следует, что $Xy = z$ разрешимо уже в M.

Короткая точная последовательность называется чистой, если её левая стрелка чистая. Объект Q называется чисто-инъективным, если любая чистая точная последовательность $Q \to M \to M'$ расщепляется. Объект P называется чисто-проективным, если любая чистая точная последовательность $N' \to N \to P$ расщепляется. Объект Y называется fp-инъективным, если любая точная последовательность $Y \to M \to K$ с конечнопредставленным K расщепляется.

$Psh(R)$ — это категория аддитивных функторов из категории конечнопредставленных *левых* R-модулей в категорию абелевых групп.

Объект X в произвольной кополной категории называется компактным (или конечнопредставленным), если функтор $\mathrm{Hom}(X, -)$ коммутирует с фильтрованными копределами.

1 Эпиморфизмы

(#)1.1. В категории с пушаутами $f : A \to B$ эпиморфизм $\iff$ кодиагональ $B \amalg_A B \to B$ изоморфизм.

1.2. TFAE:

- i) морфизм колец $f : R \to S$ — эпиморфизм
- ii) морфизм умножения $S \otimes_R S \to S$ — изоморфизм
- iii) $S \otimes_R (S/\operatorname{Im} f) = 0$
- iv) ограничение скаляров $f_* : \mathrm{Mod}{-}S \to \mathrm{Mod}{-}R$ — полный функтор
- v) $f_* f^* \to \mathrm{Id}$ — изоморфизм функторов, где $f^* := - \otimes_R S$, левый сопряжённый к ограничению

1.3. $f : R \to S, g : S \to T$ — вложения колец, fg — эпиморфизм, S и T плоские над R. Тогда f эпиморфизм.

1.4. Если $f : R \to S$ эпиморфизм, и R коммутативно, то S коммутативно.

2 Чистота и относительная гомологическая алгебра

2.1.1 Эквивалентны условия:

- i) $j : M \to N$ чистый;
- ii) j алгебраически чистый;
- iii) j — фильтрованный копредел расщепимых вложений;
- iv) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Coker}\, j, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ — расщепимая короткая точная последовательность;
- v) $j \otimes_R L$ — мономорфизм для любого левого модуля L.

(#)2.1.2. Любой функтор между категориями модулей, сохраняющий фильтрованные копределы, сохраняет точность чистых коротких точных последовательностей.

2.2.1. Конечнопредставленность для модуля эквивалентна компактности. Описать компактные объекты в $Psh(R)$.

(#)2.2.2. Любой модуль — это фильтрованный копредел конечнопредставленных.

2.2.3. Композиция, произведение, и пушаут вдоль любого морфизма сохраняют чистые морфизмы. Если $fg : M \to M' \to M''$ чистый, то $f : M \to M'$ чистый.

2.3. Суммы и прямые слагаемые чисто-проективных модулей чисто-проективны. Любой модуль является коядром чистого морфизма в чисто-проективный (в категории модулей достаточно чисто-проективных). M чисто-проективен $\Leftrightarrow$ M прямое слагаемое в прямой сумме конечнопредставленных.

2.4.1. Y fp-инъективный $\Leftrightarrow$ Y чистый подмодуль в инъективном $\Leftrightarrow$ любое вложение $Y \hookrightarrow M$ чистое.

2.4.2. $M \otimes_R -$ fp-инъективный в $Psh(R)$ для любого (не обязательно конечнопредставленного) модуля M. (для определения fp-инъективности мы считаем конечнопредставленными компактные объекты в категории функторов).

2.5. (теорема Говорова-Лазара) F плоский $\Leftrightarrow$ F чистый подмодуль плоского $\Leftrightarrow$ любой морфизм, коядром которого является F, чистый $\Leftrightarrow$ F фильтрованный копредел проективных (а значит, и свободных) модулей.

2.7. TFAE:

i) Q чисто-инъективный

ii) $Q \otimes_R -$ инъективный в $Psh(R)$

iii) Q прямое слагаемое в $\mathrm{Hom}_Z(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ для некоторого L

(*)iv) морфизм сложения $\coprod_I Q \to Q$ факторизуется через естественное вложение $\coprod_I Q \to \prod_I Q$

(**)v) Q прямое слагаемое W; на W существует топология, в которой W компактен, а действие непрерывно (относительно дискретной топологии на кольце).

2.8. TFAE:

i) все правые R-модули плоские

ii) любая точная последовательность правые R-модулей чистая

iii) главные правые идеалы в R проективны

iv) всё вышенаписанное для R°

2.9. Если $\prod_{\mathbb{N}} M / \coprod_{\mathbb{N}} M$ проективный, то и $\prod_{\mathbb{N}} M$ проективный.

3 Теорема Капланского и предкомпактные объекты

Скажем, что длинная фильтрация F на модуле M — это цепочка вложенных подмодулей M_i, где $i \leq \alpha$ — ординальная нумерация, согласованная с вложениями; $M_0 = 0$, $M_\alpha = M$, $M_i \subset M_{i+1}, \cup_{i<\beta} M_i = M_\beta$. Обозначим $\bigoplus M_{i+1}/M_i$ как $gr_F M$

(#)3.1. Если вложения $M_i \to M_{i+1}$ расщепляются, то $M \cong gr_F M$. Если на M существует длинная фильтрация, такая, что $gr_F M$ проективен, то M проективен.

3.2.1. Пусть $M = \bigoplus M_i$, и каждый M_i порождён не более чем κ элементами (κ — бесконечный кардинал), и N — прямое слагаемое в M. Тогда существуют N_j, порождённые не более чем κ элементами, и $N \cong \bigoplus N_j$.

(#)3.2.2. (Kaplansky, 1950's) Любой проективный модуль является прямой суммой счётнопорождённых.

(*)3.3. (Warfield, 1972) TFAE (...but beware the large cardinal dragons)

i) существует κ, такая, что любой неразложимый R-модуль κ-порождён

ii) любой R-модуль является прямой суммой конечнопорождённых

iii) любой неразложимый R-модуль является прямой суммой циклических

iv) R — артиново кольцо главных идеалов

3.4. Модуль M конечнопорождён $\Leftrightarrow$ объединение любой вполне упорядоченной по вложению цепочки собственных подмодулей $M_I \subset M$ является собственным подмодулем $\cup M_i \subsetneq M$.

3.5. $\mathrm{Hom}(M, -)$ коммутирует с прямыми суммами $\Leftrightarrow$ объединение любой *счётной* цепочки собственных подмодулей является собственным подмодулем.

Всего задач: 16.