МГУ & НМУ, спектральная геометрия.
Экзамен 18.12.2023.

Это домашний экзамен. Решения должны быть не позднее 24 декабря присланы мне по электронной почте в отсканированном (или **хорошо** *сфотографированном на телефон) виде. Шкала оценок: $\geqslant 60$ баллов = 5 «отлично», $\geqslant 45$ баллов = «хорошо», $\geqslant 30$ баллов = «удовлетворительно».*

Задача 1. Найдите формулу для оператора Лапласа-Бельтрами в изотермических координатах на поверхности, то есть в таких локальных координатах x и y, что метрика имеет вид $ds^2 = \lambda(x,y)(dx^2+dy^2)$. *(5 баллов).*

Задача 2. Мы знаем, что спектр Дирихле области обладает свойством монотонности, то есть если $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, то $\lambda_i(\Omega_1) \geqslant \lambda_i(\Omega)$.

Докажите, что спектр Неймана не обладает таким свойством, то есть приведите примеры, в которых спектр а) возрастает и б) убывает, когда переходят от области к подобласти. *(5 баллов).*

Задача 3. Найдите верхнюю и нижнюю оценку первых десяти собственных чисел Дирихле области $ABCDEF$, где $A=(0,0)$, $B=(0,2)$, $C=(1,2)$, $D=(1,1)$, $E=(2,1)$, $F=(2,0)$. *(до 10 баллов в зависимости от оценок).*

Задача 4. Теорема Фабера-Крана утверждает, что диск минимизирует первое собственное число Дирихле $\lambda_1(\Omega)$ среди всех плоских областей той же площади. Докажите, что два дизъюнктных диска одинакового радиуса минимизируют $\lambda_2(\Omega)$ среди всех плоских областей той же площади. *(10 баллов).*

Задача 5. Докажите, что дизъюнктное объединение n дисков одинакового радиуса не может минимизировать собственные числа Дирихле $\lambda_n(\Omega)$ для всех n *(5 баллов).*

Задача 6. Пусть Ω_1 и Ω_2 — две соседние (то есть имеющие общую границу в виде куска гиперповерхности) нодальные области собственной функции u оператора Лапласа с граничным условием Дирихле в некоторой области евклидова пространства. Может ли u иметь один и тот же знак в Ω_1 и Ω_2? Приведите доказательство вашего ответа. *(5 баллов).*

Задача 7. Докажите, что спектр квадрата со стороной длины 1 с граничным условием Дирихле на трёх сторонах и условием Неймана на оставшейся стороне совпадает со спектром прямоугольного треугольника с катетами длины $\sqrt{2}$ с граничным условием Дирихле на гипотенузе и одном катете, и граничным условием Неймана на другом катете *(15 баллов).*

Задача 8. Найти спектр (с учётом кратностей!) для проективной плоскости со стандартной метрикой (полученной опусканием стандартной метрики на сфере при стандартном двулистном накрытии). *(5 баллов).*

Задача 9. Постройте изометрическое вложение первыми собственными функциями для стандартной метрики на $\mathbb{RP}^2$ в сферу. Найдите с помощью этого вложения соответствующий конформный объем $\mathbb{RP}^2$ и докажите, что

$$\Lambda_1(\mathbb{RP}^2) = \sup_g \bar{\lambda}_1(\mathbb{RP}^2, g).$$

(10 баллов).

Задача 10. Сконструируйте изометрическое погружение клиффордова тора в сферы, используя собственные функции Δ с собственным числом λ_1. Докажите, что метрика g_{Cl} на клиффордовом торе экстремальна для функционала $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g) = \lambda_1(\mathbb{T}^2, g)\,\mathrm{Area}(\mathbb{T}^2, g)$. Найдите значение $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g_{Cl})$ *(10 баллов).*

Задача 11. Сконструируйте подходящее изометрическое погружение клиффордова тора в сферу с помощью собственных фунцкий оператора Δ и докажите, что метрика g_{Cl} на клиффордовом торе экстремальна для бесконечного количества функционалов $\bar{\lambda}_j(\mathbb{T}^2, g) = \lambda_j(\mathbb{T}^2, g)\,\mathrm{Area}(\mathbb{T}^2, g)$. Найти как минимум три таких значения j. *(15 баллов).*

Задача 12*. Используя тот же подход, что и в задаче 10, докажите, что метрика g_{eq} на равностороннем торе экстремальна для функционала $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g)$. Найдите $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g_{eq})$. Докажите, что метрика g_{Cl} на клиффордовом торе не максимальна для функционала $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g)$ *(25 баллов)*.