Теория полей классов. Задачи. Осень 2023 - 1.

1. Пусть L/K - конечное расширение локальных полей с группой Галуа G. Для $1 \neq g \in G$ положим $i_{L/K}(g) \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{x \in \mathcal{O}_L} \mathrm{v}_L(gx - x)$. Проверьте, что $i_{L/K}$ есть индекс пересечения в $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_L \times_{\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K} \mathrm{Spec}\mathcal{O}_L$ диагонали с графиком морфизма, заданного g.

2. Пусть L/K - вполне разветвленное конечное расширение локального поля, $G = G_0$ - его группа Галуа, $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_L$ - максимальный идеал, l - поле вычетов L (оно же поле вычетов K) характеристики p. Тогда имеют место канонические вложения $\theta_0 : G_0 \hookrightarrow l^*$ и $\theta_i : G_i/G_{i+1} \hookrightarrow \mathfrak{P}^i/\mathfrak{P}^{i+1}$ при $i \geq 1$. $\sum\limits_{i \geq 1} G_i/G_{i+1}$ имеет естественную структуру коммутативной градуированной алгебры над l.
а) Пусть $t \in G_i$. Проверьте,что $\forall s \in G_0 \;\; sts^{-1} \in G_i$ и $\theta_i(sts^{-1}) = \theta_0(s)^i \theta_i(t)$.
б) Выведите отсюда,что если G_0 коммутативна, а i - абсцисса точки излома функции Хассе-Эрбрана (то есть $G_i \neq G_{i+1}$), то $\#(G_0/G_1) \mid i$.
в) Пусть теперь $i, j \geq 1$, $\; s \in G_i$. $t \in G_j$. Проверьте, что $sts^{-1}t^{-1} \in G_{i+j}$ и что имеет место формула $\theta_{i+j}(sts^{-1}t^{-1}) = (j - i)\theta_i(s)\theta_j(t)$.
г) Выведите отсюда,что абсциссы всех точек излома функции Хассе-Эрбрана сравнимы друг с другом по модулю p.
д) Докажите,что на самом деле $\theta_{i+j}(sts^{-1}t^{-1}) = 0$.

3. Пусть K - конечное расширение $\mathbf{Q}_p$. Проверьте, что формальные групповые законы Любина-Тэйта, отвечающие различным образующим максимального идеала кольца $\mathcal{O}_K$, не могут быть изоморфны над $\mathcal{O}_K$.

4. Пусть K - конечное расширение $\mathbf{Q}_p$. Рассмотрим формальный групповой закон Любина-Тэйта, отвечающей образующей π максимального идеала кольца $\mathcal{O}_K$.
а) Пусть $u \in U_{K,\,i}$, но $u \notin U_{K,\,i+1}$ Вычислите число Лефшеца $i_{K_\pi^n/K}(\mathrm{rec}_{\,K_\pi^n/K}(u))$.
б) Вычислите дискриминант расширения K_π^n/K.
в) Пусть $u \in U_K$. Вычислите группы ветвления расширения $K(\sqrt{u})/K$.

5. Вычислите кондуктор расширения $\mathbf{Q}(\sqrt{d})/\mathbf{Q}$, где d - бесквадратное целое число.

Напомним, что эллиптическая кривая над полем характеристики p назыветcя суперсингулярной, если эндоморфизм умножения на p чисто несепарабелен.

6. Пусть E - эллиптическая кривая над конечным расширением L поля $\mathbf{Q}$ с комплексным умножением на $\mathcal{O}_K$. Докажите, что если E имеет хорошую обыкновенную (т.е. не суперсингулярную) редукцию по модулю идеала $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_L$ характеристики p, то K можно вложить в $\mathbf{Q}_p$.

7. Пусть в условиях задачи 6 $K \notin L$, $M \stackrel{\text{def}}{=} LK$. Предположим, что E имеет хорошую (не обязательно обыкновенную) редукцию по модулю идеала $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_L$.
а) Проверьте, что $\mathfrak{p}$ не может ветвиться в M (указание: используйте инъективность отображения редукции на кольце эндоморфизмов).
б) Идеал $\mathfrak{p}$ может распадаться ($\mathfrak{p}\mathcal{O}_M = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$) или оставаться инертным ($\mathfrak{p}\mathcal{O}_M = \mathfrak{P}$) в M. Пусть $\operatorname{char}(\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}) = p$. Рассмотрим отдельно два случая: когда p распадается в $\mathcal{O}_K$ и когда оно остается инертным либо ветвится. Итого имеется четыре теоретически возможных варианта в зависимости от того, как себя ведут $\mathfrak{p}$ и p.
Для каждого из четырех вариантов укажите, возможен ли он вообще и если возможен, то какую редукцию может иметь $E \mod \mathfrak{p}$ (обыкновенную, суперсингулярную или и такую, и такую).

8. В условиях задачи 7 для произвольного простого идеала π в кольце $\mathcal{O}_L$ или в кольце $\mathcal{O}_M$ положим $q_\pi \stackrel{\text{def}}{=} \#(\mathcal{O}_L/\pi)$ (соответственно, $\#(\mathcal{O}_M/\pi)$); $a_\pi \stackrel{\text{def}}{=} 1 + q_\pi - \#(E \mod \pi)$. Пусть $\psi : J_M \to \mathbf{C}^*$ - грёссенхарактер, отвечающий кривой E (над полем M).
а) Пусть $\mathfrak{p}\mathcal{O}_M = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$. Проверьте, что $q_\mathfrak{p} = q_{\mathfrak{P}_1} = q_{\mathfrak{P}_2}$ и $a_\mathfrak{p} = \psi(\mathfrak{P}_1) + \psi(\mathfrak{P}_2)$.
б) Пусть $\mathfrak{p}\mathcal{O}_M = \mathfrak{P}$. Проверьте, что $q_\mathfrak{p}^2 = q_\mathfrak{P}$, $a_\mathfrak{p} = 0$, и $\psi(\mathfrak{P}) = -q_\mathfrak{p}$.