

**Независимый Московский Университет,
Введение в адельную математику, осень 2023**

1

1.1. Докажите, что поле \mathbb{Q} в классической (*архимедовой*) топологии НЕ локально-компактно.

Складные квадраты (по В.А. Успенскому и А.А. Кириллову)

1.2. Установите изоморфизм колец

$$\frac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}.$$

1.3. Разложите в нетривиальное прямое произведение каждое из колец $\frac{\mathbb{Z}}{100\mathbb{Z}}, \frac{\mathbb{Z}}{1000\mathbb{Z}}, \frac{\mathbb{Z}}{10000\mathbb{Z}}, \dots$

1.4. Исследуйте уравнение $x^2 = x$ в кольцах, фигурирующих в двух предыдущих задачах.

1.5. Определите или найдите где-нибудь для $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ определение *кольца d -адических чисел*

$$\mathbb{Z}_d := \varprojlim \frac{\mathbb{Z}}{d^n \mathbb{Z}}.$$

1.6. Установите изоморфизм

$$\mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5.$$

1.7. Исследуйте уравнение $x^2 = x$ в кольце \mathbb{Z}_{10} . Продолжите "влево" (в подходящем смысле) нетривиальные решения $x = \dots 25$. и $x = \dots 76$. Однозначны ли эти продолжения? Желательно короткие продолжения найти вручную, а для длинных использовать компьютерные средства. Могут ли эти решения быть периодичны? (Для строгого ответа на последний вопрос желательно ввести *топологию* на кольцах d -адических чисел).

Формальные и неархимедовы спецфункции-0

1.8. Рассмотрим для произвольного поля \mathbb{k} характеристики 0 формальный степенной ряд

$$\exp = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{k}[[z]].$$

Придайте точный смысл *тождеству* $\exp(z+w) \equiv \exp(z)\exp(w)$.

1.9. Исследуйте сходимость ряда \exp для экспоненты над полем p -адических чисел \mathbb{Q}_p . Для каких *чисел* $z, w \in \mathbb{Q}_p$ имеет смысл и выполняется *равенство* $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$?

12 октября, Г.Б. Шабат