Экзамен. Срок сдачи — до конца дня 26.12.

Оценка равна 0.03 × сумма баллов. Максимальная оценка равна 3.15

Решения принимаются в письменном виде; либо на почту denis.thn@gmail.com, либо на физическом носителе в НМУ после лекции.

1. Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ — связные категории. Правда ли, что существует цепочка функторов $\mathcal{C} \to \mathcal{E}_1 \leftarrow \mathcal{E}_2 \to \dots \mathcal{E}_k \leftarrow \mathcal{D}$ соединяющая их, где каждый из функторов является левым или правым сопряжённым? *(10)*

> *Кофинальностью* poset'а $\mathbf{L}$ называется минимум $|U|$ среди подмножеств $U \subset \mathbf{L}$, таких, что $\forall l \exists u : l \leq u$. Кофинальностью $cof\kappa$ кардинала κ называется кофинальность наименьшего ординала мощности κ. Ординал называется регулярным, если он является полным порядком на множестве регулярной мощности.

2. Докажите, что кардинал κ является регулярным $\Leftrightarrow \kappa = cof\kappa$, и что λ-фильтрованные копределы (для, возможно, нерегулярного λ) — это то же, что $cof\lambda$-фильтрованные копределы. *(5)*

3. Если α — ординал. Обозначим C_α соответствующую ему категорию (всех ординалов, меньших λ, и вложений начальных отрезков). Пусть λ — регулярный ординал, $F : \mathbf{C}_{\lambda+1} \to Set$ — функтор, отправляющий все объекты $< \lambda$ в $\emptyset$, а терминальный в одноэлементное множество. Докажите, что F сохраняет копределы по всем диаграммам формы $\mathbf{C}_\mu$, где μ — регулярный ординал, не равный λ. *(10)*

> Для следующих трёх задач: пусть вложение (не обязательно полной) подкатегории $L : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ имеет правый сопряжённый R, и $\eta : \mathrm{Id}_\mathcal{C} \to RL$ — единица сопряжения.

4. Докажите, что если L — вложение полной подкатегории, а η_c мономорфизм для всех $c \in \mathcal{C}$, то он и эпиморфизм для всех c. Приведите пример в этих же предположениях, когда он не является изоморфизмом. *(10)*

5. Приведите пример, когда η_c мономорфизм для всех $c \in \mathcal{C}$, но не эпиморфизм для некоторых c. *(10)*

6. Приведите пример, когда η — мономорфизм в категории функторов, но η_c не мономорфизм для некоторых c. *(10)*

7. Приведите пример правого сопряжённого функтора между категориями с копределами, который не сохраняет λ-фильтрованные копределы ни для какого λ. *(5)*

8. Приведите пример функтора, сохраняющего пределы и (конечно) фильтрованные копределы, который не имеет левого сопряжённого. *(5)*

9. Вложение $\mathcal{CH}aus \to \mathcal{H}aus$ имеет правый сопряжённый (компактификация Стоуна-Чеха; можете попробовать доказать его существование самостоятельно). В частности, копределы в $\mathcal{CH}aus$ вычисляются как рефлексии копределов в $\mathcal{H}aus$. Докажите, что существует единственный с точностью до единственного изоморфизма функтор $\mathcal{CH}aus \to \mathcal{S}et$, сохраняющий счётные копроизведения. Опишите его. Найдите два различных функтора, сохраняющих конечные копределы. *(10)*

10. Докажите, что категория морфизмов $\mathcal{K}^{\to}$ в λ-достижимой $\mathcal{K}$ λ-достижима, и стрелка f λ-представима $\Leftrightarrow$ её начало и конец λ-представимы. *(10)*

> Пусть $\mathbf{A} \subset \mathcal{C}$ — малая полная подкатегория.
>
> $\mathbf{A}$ *плотная* (I), если для любого c копредел функтора (забывания конца стрелки) $(\mathrm{A} \Rightarrow c) \to \mathcal{C}$ изоморфен c.
>
> $\mathbf{A}$ *colim-плотная* (II), если $\forall c \in \mathcal{C}$ существует диаграмма $\mathrm{D} \to \mathrm{A}$, такая, что её копредел в $\mathcal{C}$ изоморфен c.
>
> $\mathbf{A}$ *генератор* (III), если $\prod(a, -) : \mathcal{C} \to \hat{\mathrm{A}}$ инъективен на морфизмах (aka строгий, faithful, верный...).
>
> $\mathbf{A}$ *сильный генератор* (IV), если любой мономорфизм $i : d \to c$ в $\mathcal{C}$, для которого $(a, i) : (a, d) \to (a, c)$ сюръективен для всех a, обратим.

11. Докажите, что (I) $\Rightarrow$ (II) $\Rightarrow$ (III) $\Rightarrow$ (IV), и приведите примеры, показывающие, что (IV) $\not\Rightarrow$ (III) $\not\Rightarrow$ (II) $\not\Rightarrow$ (I). *(10)*

12. Докажите, что в $\mathcal{S}et^{op}$ есть colim-плотная подкатегория. (Попробуйте найти минимальную необходимую мощность категории и её объектов.) *(10)*