Промежуточный экзамен. Срок сдачи — до конца дня 12.11.

Оценка равна $0.035 \times$ сумма баллов. Максимальная оценка равна 4.2, что округляется вверх до оценки "отлично".

Решения принимаются в письменном виде; либо на почту denis.thn@gmail.com, либо на физическом носителе в НМУ после лекции.

1. Пусть G, H — группы, рассмотренные как категории $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ с одним объектом.

   При каких условиях на группы G, H категория $\mathrm{Fun}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ связна (как неориентированный граф)? *(5)*

   Опишите множество натуральных преобразований $(\mathrm{Id}_{\mathbf{G}}, \mathrm{Id}_{\mathbf{G}})$. Есть ли на нём структура группы? *(5)*

2. Пусть $\mathbf{A}$ — малая категория, $\mathcal{C}$ — произвольная категория. Доказать или построить контрпример: морфизм α в категории функторов $\mathrm{Fun}(\mathbf{A}, \mathcal{C})$ является мономорфизмом

   а) тогда *(5)*

   б) только тогда, *(10)*

   когда все его компоненты $\alpha_a, a \in ob(\mathcal{A})$ являются мономорфизмами в $\mathcal{C}$.

3. Пусть у функтора $U : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ есть левый сопряжённый L, $L \dashv U$. Пусть cU имеет больше одного элемента для какого-то объекта c. Докажите, что компоненты единицы сопряжения $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{S}et} \to LU$ являются инъективными функциями. *(10)*

4. Пусть $\mathbf{A}$ — малая категория, в которой есть все произведения. Докажите, что такая категория является предпорядком. *(5)*

5. Пусть $\mathbf{A}$ — малая категория. Докажите, что в ней есть все пределы тогда и только тогда, когда в ней есть все копределы. *(5)*

6. Докажите, что если категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ эквивалентны, то [в $\mathcal{C}$ есть все пределы] $\Leftrightarrow$ [в $\mathcal{D}$ есть все пределы]. *(5)*

7. Q — это топологическое пространство рациональных чисел с топологией подпространства $\mathbb{R}$. Есть ли у функтора $- \times Q : \mathcal{T}op \to \mathcal{T}op$ правый/левый сопряжённый? *(10)*

8. Есть ли у забывающего функтора из категории групп в категорию моноидов правый/левый сопряжённый? *(5)*

9. Полная малая подкатегория $i : \mathbf{U} \hookrightarrow \mathcal{C}$ называется *плотной*, если любой объект c является копределом забывающего функтора $(\mathbf{U} \Rightarrow c) \to \mathcal{C}$. Простыми словами — любой объект является копределом **всех** стрелок из $\mathbf{U}$ в себя.

   В категории топологических пространств нет плотной подкатегории. *(15)*

   Для малой полной подкатегории $\mathbf{Q} \subset \mathcal{C}$ рассмотрим коограничение функтора Йонеды

   $$Y_Q : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathbf{V}^\circ, \mathcal{S}et) : c \mapsto \mathrm{Hom}_C(-, c).$$

   Докажите, что Y_Q полный и строгий $\Leftrightarrow$ $\mathcal{Q}$ плотная. *(20)*

10. Определим для функтора $P : \mathbf{D} \to \mathbf{I}$ набор подкатегорий $\mathbf{D}_i$, индексированный объектами $\mathbf{I}$. $\mathbf{D}_i$ состоит из таких морфизмов u, что $uP = 1_i$ (т. е. это «слой» функтора P над i). Если $F : \mathbf{D} \to \mathcal{C}$ — некоторый функтор, обозначим ограничение F на $\mathbf{D}_i$ как $F_i : \mathbf{D}_i \to \mathcal{C}$.

    Пусть $F : \mathbf{D} \to \mathcal{C}$ — некоторый функтор, в $\mathcal{C}$ есть все пределы, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{I}$ малые, и естественный функтор (*какой именно?*) $\mathbf{D}_i \to (i \Rightarrow P)$ финальный.

    Постройте функтор $FP_* : \mathbf{I} \to \mathcal{C}$, который продолжает функцию на объектах, отправляющую i в $\lim F_i$, и докажите, что такой FP_* однозначно определён. *(5)*

    Докажите, что $\lim F \cong \lim FP_*$ (постройте естественное по F отображение этих пределов, и докажите, что это изоморфизм). *(10)*

11. Пусть s — предел диаграммы из непунктирных стрелок. Докажите, что если j мономорфизм, то и p_a мономорфизм. *(5)*

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r, dashed, "p_a"] \arrow[d, dashed, "p_b"] & a \arrow[d] \\ b \arrow[r, "j"] & c \end{tikzcd}$$