Анализ-1 НМУ, 2024/25 гг.

Листок №11

1) доказать, что всякая равномерно сходящаяся последовательность ограниченных функций равномерно ограничена (дать определение равномерной ограниченности);

2) пусть последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ сходятся равномерно на $E \subset \mathbb{R}$. Доказать, что последовательность $\{f_n + g_n\}$ также сходится равномерно на E. Пусть, кроме того, $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ – последовательности ограниченных функций. Тогда и последовательность $\{f_n g_n\}$ сходится равномерно на E. Та же задача относительно рядов.

3) Пусть ряд $\sum a_n(x)$ сходится равномерно на $E \subset \mathbb{R}$, а функция f ограничена на E. Тогда ряд $\sum f(x)a_n(x)$ также равномерно сходится на E, и $\sum f(x)a_n(x) = f(x) \sum a_n(x)$.

4) рассмотрим ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}.$$

При каких x он сходится абсолютно? На каких отрезках он сходится равномерно, а на каких - нет? Непрерывна ли f в точках сходимости? Ограничена ли f?

План лекции №11. Ряды функций.

Теоремы о переходе к пределу в равномерно сходящихся рядах функций, о почленном дифференцировании и интегрировании этих рядов.