Анализ-1 НМУ, 2024/25 гг.

Листок №12

1) (Критерий Коши равномерной сходимости семейства функций) Доказать, что $f_t(x) \to f(x)$ при $t \to t_0$ равномерно по $x \in E$ тогда, и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, т.ч. $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$, $\forall t_1, t_2 : |t_1 - t_0| < \delta$, $|t_2 - t_0| < \delta$, и $\forall x \in E$;

2) равномерный предел непрерывных функций – снова непрерывная функция;

3) (переход к пределу под знаком интеграла) Пусть $f_t(x) \to f(x)$ при $t \to t_0$ равномерно по $x \in [a, b]$, и $f_t(x)$ ограничена и интегрируема на $[a, b]$ при $\forall t$. Тогда f также интегрируема, и $\int_a^b f dx = \lim_{t \to t_0} \int_a^b f_t dx$;

4) если последовательность непрерывных функций сходится монотонно в каждой точке отрезка к другой непрерывной функции, то сходимость равномерна;

5) (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла) Пусть либо $b = \infty$, либо $f_t(b) = \infty$. Для равномерной сходимости при $t \in E$ несобственного интеграла $\int_a^b f(t, x) dx$ необходимо и достаточно: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, т.ч. $|\int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx| < \varepsilon$, $\forall x_1, x_2 \in (b - \delta, b)$, $\forall t \in E$;

6) если $|f(x, t)| \leq g(x, t)$ и $\int_a^b g(x, t) dx$ сходится равномерно по t, то и $\int_a^b f(x, t) dx$ сходится равномерно по t;

7) Для несобственных равномерно сходящихся интегралов верны:
а) утверждение задачи 3 (о переходе к пределу под знаком интеграла);
б) теорема о дифференцировании под знаком интеграла в точке $t \in (c, d)$ – при условии, что $\int_a^b f_t'(x, t) dx$ сходится равномерно при $t \in [c, d]$).

План лекции №12. Интегралы функций, зависящих от параметра. Некоторые специальные функции.

Равномерный предел функций по параметру, соответствующий критерий Коши. Переход к пределу и дифференцирование под знаком интеграла. Несобственные интегралы, зависящие от параметра, их равномерная сходимость. Γ-функция и B-функция Эйлера. Гипергеометрическая функция Гаусса.