Анализ-1 НМУ, 2024/25 гг.

Листок №3

1) Доказать, что бесконечная геометрическая прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при $|q| < 1$, и тогда её сумма равна $\frac{1}{1-q}$, и расходится при $|q| \geq 1$.

2) Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$. Тогда ряд $\sum a_n$ сходится тогда, и только тогда, когда сходится ряд $\sum 2^k a_{2^k}$.

3) Доказать, что $\sum \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$ (указание: применить задачу 2).

4) $\sum \frac{1}{n}$ расходится, $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится (з-ча 3). Проверить, что a) для обоих рядов $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$; b)* для обоих рядов $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

5) Доказать, что $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$ (указание: применить задачу 2 и свести к задаче 3).

6) Если ряд сходится условно, то существуют перестановки, при которых он сходится к $+\infty$ и к $-\infty$.

7) Ряд сходится абсолютно тогда, и только тогда, когда все его перестановки сходятся к одной и той же сумме.

План лекции №3.

Числовые ряды

Сходящиеся ряды. Критерий Коши для рядов. Ряды с неотрицательными членами и знакопеременные ряды. Признаки Коши и Даламбера. Сумма и произведение рядов. Абсолютная и условная сходимость. Теорема Римана об условно сходящихся рядах.