Анализ-1 НМУ, 2024/25 гг.

Листок №4

1) для $x \in \mathbb{C}$ определим $\exp x$ рядом: $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Доказать, что

a) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;

b) $\exp x > 0$ при каждом $x \in \mathbb{R}$;

c) $\exp x$ монотонно возрастает на всей вещественной оси;

2) доказать, что $f(x)$ имеет предел A при $x \to a$ тогда, и только тогда, когда для каждой последовательности $x_n \to a$ последовательность $f(x_n)$ сходится к A;

3) доказать, что сумма, разность, произведение и суперпозиция непрерывных функций являются непрерывными функциями. То же относительно частного при условии, что знаменатель не обращается в 0.

4) определим $\ln x$ как функцию, определённую на положительной полуоси, обратную к $\exp x$. Доказать, что $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ и $\ln e = 1$;

5) При $a > 0$ и произвольном (комплексном) x положим по определению $a^x = e^{x \ln a}$. Доказать, что

a) $\exp x = e^x$;

b) $\ln e^x = x$;

c) $(e^x)^y = e^{xy}$;

6) доказать, что при натуральном n новое определение $x^n = e^{n \ln x}$ эквивалентно старому $x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ раз}}$;

План лекции №4.

Функции, пределы, непрерывность.

Пределы функций. Непрерывность и её основные свойства. Экспонента и натуральный логарифм.