Анализ-1 НМУ, 2024/25 гг.

Листок №6–7

1) доказать, что если дифференцируемы функции u и v, то дифференцируемы и функции $u \pm v$, uv, а при $v \neq 0$ и u/v, причём

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \qquad (uv)' = u'v + uv' \quad \text{(правило Лейбница)};$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \qquad (\lambda u)' = \lambda u', \text{ где } \lambda \text{ – число};;$$

2) Производные элементарных функций: доказать, что

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}; \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0); \qquad (e^{ix})' = ie^{ix}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x);$$

3) Исследовать все вышеперечисленные функции на монотонность, экстремумы, выпуклость и точки перегиба на области их определения;

4) доказать, что следующие функции имеют дифференцируемые обратные функции: $\sin x$ на $[-\pi/2, \pi/2]$; $\cos x$ на $[0, \pi]$; $\operatorname{tg} x$ на $[-\pi/2, \pi/2]$, $\operatorname{ctg} x$ на $[0, \pi]$; Обратные функции обозначаются соответственно arcsin, arccos, arctg и arcctg. Найти их производные.

5) найти пределы, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - sinx}; \qquad \lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}; \qquad \lim_{x \to 0} x^x; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin mx}{\ln \sin x};$$

План лекций №6–7.

Производная

Производная, дифференциал, касательная, скорость. Производная суперпозиции, инвариантность дифференциала, производная обратной функции. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Производные элементарных функций. Необходимые и достаточные условия экстремума, выпуклость, точки перегиба.