Анализ-1 НМУ, 2024/25 гг.

Листок №7

1) доказать, что если функция дифференцируема в точке, то она и непрерывна в этой точке;

2) доказать, что степенной ряд расходится вне радиуса сходимости (применить признак Коши);

3) доказать следующие разложения Тэйлора в окрестности точки $x = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

4) найти следующие пределы с применением формулы Тэйлора:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad x > 0;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2(1-\cos x)};$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1-\cos x} \quad \text{(см. опред. } \operatorname{ch} x \text{ ниже)};$$

5) определим гиперболические косинус (ch) и синус (sh) формулами

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Показать, что

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$$

План лекции №7.

Дифференциальное исчисление (продолжение)

Теорема существования дифференцируемой обратной функции. Формула Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Юнга. Необходимые и достаточные условия экстремума, выпуклость, точки перегиба. Ряд Тэйлора. Степенные ряды. Сходимость ряда Тэйлора как такового, и к порождающей его функции.