Анализ-1 НМУ, 2024/25 гг.

Листок №8

1) доказать, что :

$$\int e^x = e^x + C; \qquad \int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int \sin x = -\cos x + C; \qquad \int \cos x = \sin x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x + C; \qquad \int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsh} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C;$$

2) доказать, что сумма и произведение ступенчатых функций снова являются ступенчатыми функциями;

3) доказать, что функция интегрируема тогда, и только тогда, когда любая последовательность интегральных сумм с шагом разбиения, стремящимся к нулю, стремится к одному и тому же пределу;

4) пусть f и g интегрируемы, тогда

a) $f+g$ интегрируема, и $\int\limits_a^b (f+g)dx = \int\limits_a^b f dx + \int\limits_a^b g dx$;

b) $\int\limits_a^b \lambda f dx = \lambda \int\limits_a^b f dx$, $\lambda \in \mathbb{C}$;

c) $\left|\int\limits_a^b f dx\right| \le \int\limits_a^b |f| dx$ $(a < b)$;

5) доказать, что для любых a, b, c (независимо от их расположения)

$$\int\limits_a^b f dx + \int\limits_b^c f dx = \int\limits_a^c f dx$$

(свойство аддитивности интеграла).

План лекции №8. Интеграл

Интегральные суммы, определённый интеграл. Интерируемость непрерывной функции. Производная интеграла по верхнему пределу, формула Ньютона–Лейбница. Первообразная и неопределённый интеграл. Формулы замены переменных в определённом и неопределённом интегралах. Интегрирование по частям. Теорема о среднем. Неравенство Шварца. Площадь и путь.