

Анализ на многообразиях

Подмногообразия аффинного пространства

Задачи на 2 сентября 2024 г.

- 1) При каких значениях параметра a уравнение $y^2 = (x^2 - a)(x - 1)$ задает гладкую кривую (подмногообразие размерности 1) на плоскости \mathbb{R}^2 . Нарисовать (различные) получающиеся кривые для таких a , а также для тех a , когда условие гладкости нарушается.
- 2) При каких значениях параметра a уравнения $x^4 + y^4 + z^4 = 1$, $x^3 + y^3 + z^3 = a$ задают гладкую кривую в пространстве \mathbb{R}^3 .
- 3) Доказать, что множество матриц с определителем 1 является гладким подмногообразием в пространстве $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(3, 3) \cong \mathbb{R}^9$ матриц размера 3×3 .
- 4) Доказать, что множество ортогональных матриц является гладким подмногообразием в пространстве $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(3, 3) \cong \mathbb{R}^9$ матриц размера 3×3 .
- 5) Доказать, что множество ортогональных матриц с определителем 1 является гладким подмногообразием в пространстве $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(3, 3) \cong \mathbb{R}^9$ матриц размера 3×3 .

Задачи на 9 сентября 2024 г.

- 1) Доказать, что множество ортогональных матриц с определителем 1 является гладким подмногообразием в пространстве $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ матриц размера $n \times n$.
- 2) Механическая система в (обычном “нашем”) пространстве состоит из n стержней длин ℓ_1, \dots, ℓ_n , последовательно соединенных в цепочку шарнирами. Концы цепочки закреплены в фиксированных точках, находящихся на расстоянии ℓ друг от друга. Вложить множество состояний этой системы в аффинное пространство. Выяснить, при каких ℓ и ℓ_i это множество является подмногообразием в аффинном пространстве “правильной размерности” (что это означает, разберитесь сами).
- 3) В пространстве \mathbb{R}^{n^2} с координатами u_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, рассматривается подмножество, задаваемое уравнениями $u_{ij} = u_{ji}$, $u_{11} + u_{22} + \dots + u_{nn} = 1$, $u_{ij}u_{kl} = u_{ik}u_{jl}$. Доказать, что это — подмногообразие в \mathbb{R}^{n^2} . Какова его размерность?