Анализ на многообразиях

Подмногообразия аффинного пространства, касательные векторы

Задачи до 16 сентября 2024 г.

1) Доказать, что $U(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n,n) : \overline{A^T}A = E\}$ ($\bar{\cdot}$ — комплексное сопряжение, E — единичная матрица) является гладким подмногообразием в $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n,n) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$. Найти его размерность.

2) Доказать, что $SU(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n,n) : \overline{A^T}A = E,\ \det A = 1\}$ является гладким подмногообразием в $\mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n,n) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$. Найти его размерность.

3) В пространстве $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,n)$ рассматривается подмножество $M = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,n) : A^2 = E\}$. Доказать, что связные компоненты множества M являются гладкими подмногообразиями в $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Найти их размерности.

4) Для фиксированных m, n и r обозначим через $M_{m,n,r}$ подмножество в $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m,n)$, состоящее из таких матриц A, что $\mathrm{rk}\, A = r$. Доказать, что $M_{m,n,r}$ является гладким подмногообразием в области пространства $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m,n) \cong \mathbb{R}^{mn}$. Найти его размерность. (Область $\equiv$ открытое подмножество. Если кого-то напрягает “система из нуля уравнений” :-) , можно считать, что $r < m$, $r < n$.)

5) В пространстве $\mathbb{C}^n$ рассматривается подмножество M, задаваемое уравнением $f(z_1, \ldots, z_n) = 0$, где f — голоморфная (т. е. дифференцируемая в комплексном смысле) функция (для тех, кому неизвестно, что это такое (а таких, как я понимаю, должно быть большинство), f — многочлен (с комплексными коэффициентами) от переменных $z_1, \ldots, z_n$) такая, что $(\frac{\partial f}{\partial z_1}(\overline{z}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(\overline{z})) \neq 0$ для всех $\overline{z} \in M$ (что такое производная многочлена знать должны все). Доказать, что M — гладкое подмногообразие в $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$.

6) Найти $T_E SU(n)$, т. е. множество векторов, принадлежащих этому пространству (E — единичная матрица).

7) Для $G = SL(n)$, $O(n) \subset \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,n)$ и $A \in G$ найти условие на матрицу $X \in T_A \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,n) = \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,n)$, означающее, что $X \in T_A G$.

8) Является ли $(1,-4,1) \in \mathbb{R}^3$ касательным вектором к единичной сфере $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ в точке $(2/3, 1/3, 2/3)$? Если да, то записать его в сферических координатах на сфере: широта ψ (отсчитываемая, скажем, от “северного полюса” $(0,0,1)$) и долгота φ (отсчитываемая, скажем, от оси Ox в положительном (в плоскости Oxy) направлении).