Анализ на многообразиях

Многообразия, касательные пространства.

Задачи до 23 сентября 2024 г.

1) Доказать, что множество прямых на плоскости является многообразием (т. е. описать/задать на нём (естественную) структуру (гладкого) многообразия).

2) Доказать, что множество k-мерных векторных подпространств в n-мерном векторном пространстве является многообразием. Найти его размерность. (Оно называется грассмановым многообразием и обозначается (обычно) $\mathrm{Gr}(k, n)$.)

3) Доказать, что множество ортонормированных k-реперов (т. е. ортонормированных наборов из k векторов) в n-мерном векторном пространстве является многообразием. Найти его размерность. (Оно называется многообразием Штифеля и обозначается (обычно) $V_{n,k}$.)

4) Рассмотрим отображение F многообразия Штифеля $V_{n,k}$ в грассманово многообразие $\mathrm{Gr}(k, n)$, переводящее репер в его линейную оболочку. Докажите, что отображение F имеет постоянный ранг. Опишите (как гладкое многообразие) прообраз точки при отображении F.

5) Пусть V — подмножество (подмногообразие) (комплексного) пространства $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, задаваемое уравнением $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 = 1$. Доказать, что V диффеоморфно пространству касательного расслоения (стандартной) $(n-1)$-мерной сферы.

6) Пусть S — множество **неупорядоченных** наборов $\{z_1, \ldots, z_n\}$ из n комплексных чисел. Доказать, что S является гладким многообразием.

7) Пусть конечная группа G свободно действует на многообразии M. (Свободность действия означает, что если $g * x = x$ ($x \in M$, $g \in G$), то g — единичный элемент.) Доказать, что множество орбит этого действия (т. е. факторпространство M/G) является гладким многообразием. Показать, что это, вообще говоря, не так для действия бесконечной группы.