Анализ на многообразиях

Векторные поля и однопараметрические группы диффеоморфизмов

Задачи до 30 сентября 2024 г.

1) Пусть $\gamma(t)$ — кривая на подмногообразии M^k аффинного пространства $\mathbb{R}^n$, $\gamma(0) = P$. Является ли $\ddot{\gamma}(0)$ $(= \frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}(0))$ касательным вектором к подмногообразию M^k (в точке P)? (Почему?) Доказать, что если $\dot{\gamma}(0) = 0$, то $\ddot{\gamma}(0)$ — касательный вектор к подмногообразию M^k в точке P.

2) Доказать, что на (абстрактном, т. е. не лежащем в афинном пространстве) многообразии M^k имеет место аналог утверждения Задачи 1: если $\gamma(t)$ — кривая на многообразии M^k с $\gamma(0) = P$ и вектор скорости $\dot{\gamma}(0)$ является нулевым, то $\ddot{\gamma}(0)$ является касательным вектором к многообразию M^k в точке P (более строго — может быть определён как касательный вектор).

3) Пусть U и V — векторные поля на многообразии M^k, f и g — (гладкие) функции на M^k. Доказать равенство $[fU, gV] = fg[U, V] - gV(f)U + gU(g)V$.

4) Верно ли, что если два векторных поля на многообразии M^k касаются подмногообразия N^s в точке P, то их коммутатор тоже касается этого подмногообразия в этой точке? Верно ли, что если два векторных поля на многообразии M^k касаются подмногообразия N^s (во всех точках последнего), то их коммутатор тоже касается этого подмногообразия?

5) Группой Ли называется многообразие G со структурой группы такой, что групповые операции в ней (т. е. умножение (как отображение $G \times G \to G$) и взятие обратного элемента (как отображение $G \to G$)) гладкие. Для $g \in G$ обозначим через φ_g отображение $G \to G$ умножения на g справа: $\varphi_g(a) = ag$. Векторное поле U называется правоинвариантным, если $\varphi_{g*}U = U$. (Это определение имеет смысл, поскольку φ_g — диффеоморфизм. Легко видеть, что правоинвариантные векторные поля определяются своими значениями в единице e группы G и поэтому находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами касательного пространства T_eG.) Доказать, что коммутатор двух правоинвариантных векторных полей правоинвариантен.

6) Пусть G — матричная группа Ли (т. е. подмногоообразие в открытом подмножестве $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n)$ пространства матриц $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$, являющееся его подгруппой). Для вектора (матрицы) $X \in T_EG$ обозначим через U_X правоинвариантное векторное поле, определяемое этим вектором. В соответствии с Задачей 5 $[U_X, U_Y] = U_Z$ для некоторого $Z \in T_EG$. Вычислить вектор Z (естественно с доказательством).

7) Пусть G как в Задаче 6. Доказать, что для правоинвариантного векторного поля U_X соответствующая псевдогруппа диффеоморфизмов $\Gamma_t(x)$ является группой и выислить её (т. е. вычислить $\Gamma_t(x)$ для $x \in G$).