Анализ на многообразиях

Группы Ли и алгебры Ли

Задачи до 21 октября 2024 г.

14 октября либо не будет (очного) приёма задач, либо он состоится в сильно укороченном формате. В этот же день (14 октября) планируется листочек с дополнительными задачами.

1) Найти алгебры Ли групп SU(2) и SO(2).

2) Найти алгебру Ли группы кватернионов длины 1. (Алгебра кватернионов — алгебра над вещественными числами, порожденная (как векторное пространство) элементами 1, i, j, и k с таблицей умножения $ii = jj = kk = -1$ $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ki = j$. Длина кватерниона $a + bi + cj + dk$ равна $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$) Замечание. Группа единичных кватернионов, формально говоря, матричной группой не является. Поэтому вычисления, проделанные на лекции, напрямую неприменимы. Доказать, что все алгебры Ли из задач 1 и 2 изоморфны.

3) Найти группу Ли размерности 2, алгебра Ли которой является не коммутативной.

4) Найти бесконечное семейство попарно неизоморфных (вещественных) алгебр Ли размерности три.

5) 5. Рассмотрим следующие векторные поля на плоскости $\mathbb{R}^2$: $e = x\frac{\partial}{\partial y}$, $f = y\frac{\partial}{\partial x}$, $h = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$. Вычислить коммутаторы $[h, e]$, $[h, f]$ и $[e, f]$. Доказать, что линейная оболочка этих полей изоморфна алгебре Ли (вещественных) 2×2-матриц с нулевым следом.