

Анализ на многообразиях

Метрика на многообразиях.

Задачи до 28 октября 2024 г. Задача со звёздочкой срока давности не имеет (в пределах курса, естественно).

- 1) На параметрически заданной поверхности в \mathbb{R}^3 (со стандартной евклидовой метрикой): $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$ записать метрику в координатах u и v и найти угол между (пересекающимися) кривыми $\{u+v=0\}$ и $\{u-v=0\}$.
- 2) Вычислить метрику на единичной сфере в координатах u и v , возникающих при стереографической проекции. Записать её через $z = u + iv$, $\bar{z} = u - iv$.
- 3) Пусть метрика на поверхности в локальных координатах имеет вид $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$. Найти площадь треугольника, образованного кривыми $u = \pm av$, $v = 1$.
- 4) Проверить, что матричнозначная функция

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & uv \\ uv & 1 + u^2 \end{pmatrix}$$

задаёт риманову метрику на плоскости \mathbb{R}^2 с координатами u и v и найти длину кривой $u = v$.

- 5*) На группе Ли $SO(3)$ определим риманову метрику формулой $(X, Y) = \text{tr}(XA^{-1}(YA^{-1})^T)$ $X, Y \in T_A SO(3)$. Проверить, что это действительно метрика. Найти объём многообразия $SO(3)$ для этой метрики.