

## Анализ на многообразиях

Метрика на многообразиях.

**Задачи до 28 октября 2024 г. Задача со звёздочкой срока давности не имеет (в пределах курса, естественно).**

- 1) На параметрически заданной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  (со стандартной евклидовой метрикой):  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = av$  записать метрику в координатах  $u$  и  $v$  и найти угол между (пересекающимися) кривыми  $\{u+v=0\}$  и  $\{u-v=0\}$ .
- 2) Вычислить метрику на единичной сфере в координатах  $u$  и  $v$ , возникающих при стереографической проекции. Записать её через  $z = u + iv$ ,  $\bar{z} = u - iv$ .
- 3) Пусть метрика на поверхности в локальных координатах имеет вид  $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ . Найти площадь треугольника, образованного кривыми  $u = \pm av$ ,  $v = 1$ .
- 4) Проверить, что матричнозначная функция

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & uv \\ uv & 1 + u^2 \end{pmatrix}$$

задаёт риманову метрику на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $u$  и  $v$  и найти длину кривой  $u = v$ .

- 5\*) На группе Ли  $SO(3)$  определим риманову метрику формулой  $(X, Y) = \text{tr}(XA^{-1}(YA^{-1})^T)$   $X, Y \in T_A SO(3)$ . Проверить, что это действительно метрика. Найти объём многообразия  $SO(3)$  для этой метрики.