Анализ на многообразиях

Дифференциальные формы.

Задачи до 11 ноября 2024 г. Как я понимаю, 4 ноября занятий не будет: праздник.

1) На подмногообразии N^k многообразия M^n задана (гладкая) функция f. Доказать, что она может быть продолжена на всё многообразие M^n, т. е. существует (гладкая) функция F на M^n такая что её ограничение $F_{|N^k}$ на подмногообразие N^k совпадает с f.

2) Пусть $F : M^n \to N^k$, $n > k$, — невырожденное отображение (т. е. $\operatorname{rk} dF_x = k$ для любой точки $x \in M^n$). Доказать, что для любого (гладкого) векторного поля U на N^k существует (гладкое) векторное поле $\widehat{U}$ на M^n такое, что для любой точки $x \in M^n$ образ $dF_x(\widehat{U}(x))$ вектора $\widehat{U}(x)$ совпадает с $U(F(x))$.

3) Тензор $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2}\right) \otimes (2dx^1 - dx^3)$ задает оператор A (на касательном пространстве T_xM). Какой тензор задаёт оператор A^2?

4) Выразить через след и определитель матрицы A (к предыдущей задаче отношения не имеет :)) величины $\operatorname{tr}(A \otimes A)$ и $\det(A \otimes A)$.

5) Пусть $U(x)$ — векторное поле на многообразии M^n. Доказать, что $a^i_j = \frac{\partial U^i}{\partial x^j}$ тензором, вообще говоря, не является. (Т. е. величины a^i_j, определяемые в каждой локальной системе координат формулой $a^i_j = \frac{\partial U^i}{\partial x^j}$, не задают тензор.)

6) Пусть $\alpha(x)$ — ковекторное поле на многообразии M^n (иными словами — дифференциальная 1-форма). Доказать, что $a_{ij} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}$ тензором, вообще говоря, не является.

7) Доказать, что любая группа Ли ориентируема.

8) В задаче 5 листочка от 9 сентября предлагалось доказать, что подмножество M пространства $\mathbb{C}^n$, задаваемое уравнением $f(z_1, \dots, z_n) = 0$, где (для простоты) f — многочлен (с комплексными коэффициентами) от переменных z_1, …, z_n такой, что $(\frac{\partial f}{\partial z_1}(\overline{z}), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(\overline{z})) \neq 0$ для всех $\overline{z} \in M$, является гладким подмногообразием в $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Доказать, что оно ориентируемо.