Анализ на многообразиях

Дифференциальные формы и их интегрирование.

Задачи до 11 ноября 2024 г.

1) Найти $f^*\omega$ для формы $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где f — отображение плоскости в себя $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$.

2) Вычислить (внешний) дифференциал формы ω из предыдущей задачи.

3) Пусть Ω — дифференциальная k-форма на многообразии, ω — дифференциальная 1-форма, не обращающаяся в нуль (ни в одной точке). Доказать, что Ω представима в виде $\omega \wedge \theta$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

4) Доказать, что дифференциальная 2-форма $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ на пространстве $\mathbb{R}^3$ инвариантна относительно ортогональных замен координат, сохраняющих начало. Выяснить, как она себя ведёт при гомотетиях пространства $\mathbb{R}^3$ с центром в нуле.

5) Вычислить непосредственно и с помощью теоремы Стокса интеграл

$$\oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy,$$

где L —окружность $x^2 + y^2 = R^2$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, ориентированная в положительном направлении.

6) Вычислить $\displaystyle\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ для любого контура L. Объяснить, как ответ согласуется с теоремой Стокса.

7) Вычислить непосредственно и с помощью теоремы Стокса интеграл

$$\oint_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz,$$

где L — эллипс в пространстве $\mathbb{R}^3$, заданный уравнениями $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$. (Ориентацию выбрать по своему усмотрению.)

8) Вычислить с помощью теоремы Стокса интеграл

$$\iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

где S — граница куба в пространстве $\mathbb{R}^3$, заданного неравенствами $0 \leq x, y, z \leq a$ (и ориентированная как граница положительно ориентированного куба :)).