Анализ на многообразиях

Когомологии де Рама

Задачи до 25 ноября 2024 г.

1) Вычислить когомологии де Рама плоскости без точки. Найти дифференциальные формы, классы которых образуют базис в когомологиях.

2) Вычислить когомологии де Рама плоскости без нескольких точек. Найти дифференциальные формы, классы которых образуют базис в когомологиях.

3) Вычислить когомологии де Рама обычной (двумерной) сферы.

4) Вычислить когомологии де Рама n-мерной сферы.

5) Пусть на многообразии M действует конечная группа G. Обозначим через $\Omega^{kG}(M)$ пространство дифференциальных k-форм на N, инвариантных относительно G. Внешний дифференциал d переводит $\Omega^{kG}(M)$ в $\Omega^{(k+1)G}(M)$. Пусть $H^{kG}_{\mathrm{dR}}(M)$ — группы (ко)гомологий комплекса $(\Omega^{kG}(M), d)$. Доказать, что группа $H^{kG}_{\mathrm{dR}}(M)$ изоморфна подгруппе $\left(H^k_{\mathrm{dR}}(M)\right)^G$ группы $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$, состоящей из элементов, инвариантных относительно G.

6) Пусть действие группы из задачи 5) свободно. Доказать, что группы $\left(H^k_{\mathrm{dR}}(M)\right)^G$ изоморфны группам когомологий факторпространства (многообразия) M/G.

7) Вычислить когомологии де Рама n-мерного (вещественного) проективного пространства.

8) Пусть $\omega = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ — замкнутая k–форма на пространстве $\mathbb{R}^n$ $(k > 0)$. Написать явную формулу, определяющую $(k-1)$–форму ζ, для которой $d\zeta = \omega$.

9) Пусть M — связное ориентируемое n- мерное многообразие. Доказать, что $H^n_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathbb{R}$.

10) Пусть M — связное неориентируемое n- мерное многообразие. Доказать, что $H^n_{\mathrm{dR}}(M) \cong 0$.