Анализ на многообразиях

Когомологии де Рама, лемма Сарда, степень отображения.

Задачи до 2 декабря 2024 г.

1) Вычислить когомологии де Рама двумерного тора.

2*) Вычислить когомологии де Рама n-мерного тора.

3) *Когомологии де Рама с компактными носителями* $H^k_c(M)$ определяются полностью аналогично обычным когомологиям де Рама с той лишь разницей, что вместо произвольных дифференциальных форм рассматриваются дифференциальные формы с компактными носителями. Вычислить $H^k_c(\mathbb{R}^1)$.

4*) Вычислить $H^k_c(\mathbb{R}^2)$.

5) Критическая точка $\overline{x}$ (гладкой) функции f (определённой в окрестности точки $\overline{x}$ на многообразии M^n) называется невырожденной, если матрица $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x})\right)$ вторых производных функции f в точке $\overline{x}$ (в локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$) невырождена (т. е. её определитель отличен от нуля).Доказать, что это определение корректно,т. е. не зависит от выбора локальных координат.

6) Пусть f — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$. Доказать, что существует сколь угодно малая (как элемент двойственного пространства $(\mathbb{R}^n)^*$) линейная функция ℓ такая, что функция $f+\ell$ имеет только невырожденные критические точки.

7) Пусть f — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$. Доказать, что существует сколь угодно малая (как элемент двойственного пространства $(\mathbb{R}^n)^*$) линейная функция ℓ такая, что функция $f+\ell$ имеет только невырожденные критические точки, а все её критические значения различны.

8) Пусть f — гладкая функция на многообразии M^n. Доказать, что существует сколь угодно близкая к f (в смысле супремума модуля разности) функция $\widetilde{f}$, имеющая толко невырожденные критические точки с различными критическими значениями.

9) Вычислить степень отображения (нечётномерного!) проективного пространства $\mathbb{RP}^n$ в себя, задаваемого формулой $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (x_0^d : x_1^d : \ldots : x_n^d)$, $d \geq 0$.

10*) Вычислить степень отображения многообразия (группы Ли) $SO(n)$ в себя, задаваемого формулой $A \mapsto A^d$, $d \in \mathbb{Z}$.