

Листок № 1

1. Доказать, что сумма всех корней из единицы произвольной степени $m > 1$ равна нулю.

2. Разложить многочлен $z^5 + 1$ на неприводимые множители над \mathbf{R} и над \mathbf{C} .

3. Доказать, что связность для открытого подмножества в \mathbf{C} эквивалентна линейной связности.

4. При каких $r > 0$ множество $\{z : |z^2 - 1| < r\}$ является областью?

5. Найти все голоморфные в верхней полуплоскости функции вида $u(x) + i v(y)$.

6. Записать уравнения Коши-Римана в полярных координатах. Найти все голоморфные в верхней полуплоскости функции вида $p(|z|^2)$ и $q(\operatorname{arg} z)$.

7. Найти множества точек, в которых (а) функция $|z|^2$ (а.1) \mathbf{R} -дифференцируема, (а.2) \mathbf{C} -дифференцируема, (а.3) голоморфна; (б) функция $|x| + i|y|$ (б.1) \mathbf{R} -дифференцируема, (б.2) \mathbf{C} -дифференцируема, (б.3) голоморфна.

8. Пусть $f = u + i v$ голоморфна в \mathbf{C} и (а) $v = u^2$. Найти все такие f . (б) $u^2 + v^2 = 1$. Найти все такие f .

9. Функция f определена в окрестности точки $a \in \mathbf{C}$ и \mathbf{R} -дифференцируема в a . Доказать что для любого $\varphi \in \mathbf{R}$ существует предел

$$h(\varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(a + r e^{i\varphi}) - f(a)}{r e^{i\varphi}} \quad \text{и найти } h(\mathbf{R}).$$

10. Проверить, что теоремы о производных арифметических операций с парой функций и теорема о производной сложной функции для функций вещественного переменного вместе с их доказательствами дословно переносятся на функции комплексного переменного и комплексную производную.

11. Доказать, что корни производной комплексного многочлена лежат в выпуклой оболочке корней самого многочлена.