Листок № 2

1. (a) Доказать, что все дробно-линейные отображения (ДЛО) сферы Римана $\overline{\mathbf{C}}$ на себя образуют группу по отношению к операции композиции.
(b) Построить изоморфизм группы ДЛО и фактор-группы $SL(2, \mathbf{C})/\{\pm Id\}$.
2. Доказать, что любое ДЛО конформно в каждой точке сферы $\overline{\mathbf{C}}$.
3. Доказать, что группа ДЛО порождается аффинными преобразованиями и отображением $\{z \to 1/z\}$.
4. Доказать, что подгруппа ДЛО, сохраняющих ∞, – это аффинные преобразования плоскости $\mathbf{C}$.
5. Пусть (z_1, z_2, z_3) и (w_1, w_2, w_3) – две произвольных упорядоченных тройки попарно различных точек сферы $\overline{\mathbf{C}}$. Доказать, что существует единственное ДЛО $f(z)$, т.ч. $f(z_1) = w_1,\ f(z_2) = w_2,\ f(z_3) = w_3$.
6. Двойным отношением упорядоченной четверки точек (z_1, z_2, z_3, z_4) называется $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$.
(a) Доказать, что любое ДЛО сохраняет двойное отношение.
(b) Пусть (z_1, z_2, z_3, z_4) и (w_1, w_2, w_3, w_4) – две произвольных упорядоченных четверки попарно различных точек сферы $\overline{\mathbf{C}}$. Доказать, что если $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$, то существует единственное ДЛО $f(z)$, т.ч. $f(z_1) = w_1,\ f(z_2) = w_2,\ f(z_3) = w_3,\ f(z_4) = w_4$.
7. Доказать, что четыре различных точки лежат на одной обобщенной окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно.
8. Доказать, что любое ДЛО переводит обобщенную окружность в обобщенную окружность.
9. Доказать, что любое ДЛО сохраняет симметрию относительно обобщенной окружности.
10. (a) Написать ДЛО f верхней полуплоскости на единичный круг, т.ч. $f(a) = 0$. (b) Написать общий вид группы ДЛО (b.1) $\{|z| < 1\}$ на себя, (b.2) $\{\mathrm{Im} z > 0\}$ на себя.
11. (a) Доказать, что любое ДЛО на сфере Римана имеет одну или две неподвижные точки.
(b)* Пусть T – произвольное ДЛО, $a \in \overline{\mathbf{C}}$, $T^{(n)}$ – n-я итерация отображения T. Рассмотрим последовательность $\{a_n = T^{(n)}(a)\}$. Описать множество ее предельных точек.
12. Записать в аффинных координатах произвольное проективное преобразование пространства $\mathbf{CP}^2$.