

### Листок № 3

1. Кольцо – это открытый круг минус замкнутый круг, содержащийся в нем. Кольцо называется концентрическим, если центры кругов совпадают. Доказать, что любое кольцо с помощью ДЛЮ можно отобразить на концентрическое.
2. (а) Нарисовать образ декартовой координатной сетки (вертикальные и горизонтальные прямые) при отображении  $w = (z - i)/(z + i)$ . (б) Нарисовать образы всех обобщенных окружностей, проходящих через точки  $i$  и  $-i$ , при отображении  $w = (z - i)/(z + i)$ .
3. (а) Нарисовать образ декартовой координатной сетки при отображении  $w = z^2$ . (б) Нарисовать образ декартовой координатной сетки в верхней полуплоскости при отображении  $w = \sqrt{z}$ .
4. (а) Нарисовать образ области  $\{\alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$  при  $w = e^z$ . (б) Нарисовать образ области  $\{\alpha < \operatorname{Im} z < \beta, \operatorname{Re} z > 0\}$  при  $w = e^z$ .
5. Нарисовать образ области  $\{\alpha < \arg z < \beta\}$  при  $w = z^a, a > 0$ .
6. Нарисовать образ области  $\{\operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\}$  при  $w = (z + 2)/(z + 1)$ .
7. Нарисовать образ области  $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$  при  $w = \operatorname{ctg} z$ .
8. Нарисовать образ области  $\{-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$  при отображении  $w = \sin z$ .
9. Функцией Жуковского  $\mathcal{J}(z)$  называется функция  $w = (z + 1/z)/2$ . Полагаем  $\mathcal{J}(0) = \mathcal{J}(\infty) = \infty$ .  
В каких точках  $\overline{\mathbb{C}}$  функция Жуковского (а) голоморфна, (б) конформна? (с)  $\mathcal{J}(z_1) = \mathcal{J}(z_2)$  тогда и только тогда, когда  $z_2 = z_1^{\pm 1}$ . (д) Написать выражение для функции, обратной к  $w = \mathcal{J}(z)$ .
10. (а) Доказать, что образ окружности  $\{|z| = r, r \neq 1\}$ , под действием  $\mathcal{J}(z)$  является эллипсом. Найти фокусы и эксцентриситет. (б) Доказать, что образ прямой, проходящей через начало координат (без начала координат), под действием  $\mathcal{J}(z)$  является гиперболой. Найти фокусы. (с) Нарисовать образ полярной координатной сетки под действием  $\mathcal{J}(z)$ . (д) Найти образы под действием  $\mathcal{J}(z)$  следующих областей:  $\{|z| < 1\}$ ,  $\{|z| > 1\}$ ,  $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $\{\operatorname{Im} z < 0\}$ ,  $\{\operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$ .
11. Доказать, что функция Жуковского представима в виде композиции дробно-линейных отображений и возведения в квадрат.
12. (а) Выразить обратные тригонометрические функции через логарифм. (б) Выразить тригонометрические функции через функцию Жуковского и экспоненту.