

Листок № 5

1. Существует ли функция $f(z)$, голоморфная в нуле, удовлетворяющая условию $f(1/n) = \exp(-n)$?
2. Найти все функции, голоморфные в нуле, удовлетворяющие условию $f(z) = f(2z)$.
3. Доказать, что: (а) если $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и имеет на бесконечности полюс порядка n , то f – многочлен степени n ;
(б) если f голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением множества полюсов, то f – рациональна.
4. Разложить $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана по степеням z в каждом из возможных колец.
5. Доказать, что единичный круг нельзя конформно отобразить на \mathbb{C} .

В задачах 6-10 задание следующее: для данной функции найти все ее особые точки на $\overline{\mathbb{C}}$. Т.е. (а) все изолированные с указанием типа (для полюса указать порядок), (б) все неизолированные (точки, не являющиеся изолированными).

$$\sin(\sqrt{2}z)$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{\sin(\sqrt{2}z)}{\sin(\sqrt{3}z)}$$

$$\textcircled{7} \quad \text{ctg}^2(1+e^z)$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{1 + \exp(1 + \sin z)}{1}$$

$$\textcircled{9} \quad \cos\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$\frac{z^2(z-1)}{(z-2)}$$

$$\textcircled{10} \quad \left[\frac{5 + \sin\left(\frac{3z^2+z+1}{z^2+3z+1}\right)}{z^2} \right]$$