Листок № 6

1. (a) Пусть $\operatorname{ord}_a f = m$, $\operatorname{ord}_a g = n$, m и n – целые. Какие значения могут принимать

$$\operatorname{ord}_a(f \pm g),\ \operatorname{ord}_a(fg),\ \operatorname{ord}_a(f/g)?$$

(b) Пусть $f(a) = b$ и $\operatorname{ord}_a f = m$, $\operatorname{ord}_b g = n$, m и n – целые. Найти $\operatorname{ord}_a g(f)$.

2. Докажите, что не существует функции $f(z)$, голоморфной в проколотой окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющей равенству
(a) $e^{f(z)} = z$, (b) $(f(z))^m = z$, где $m > 1$ – натуральное,
всюду в этой окрестности.

3. Доказать, что при любом комплексном значении a и при целом $n \geq 2$ уравнение $1 + z + a\,z^n = 0$ имеет хотя бы один корень в круге $|z| \leq 2$. (Воспользоваться теоремами Руше и Виета.)

4. Найти число корней многочлена $P = z^5 + 3\,z^4 - 7\,z^3 - 2\,z^2 + 5\,z + 6$ в правой полуплоскости. (Применить принцип аргумента к большому полукругу.)

5*. Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} z = z$ имеет только действительные корни. (Применить принцип аргумента для подходящего большого круга.)

6. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+16}$. (Применить теорему о вычетах для функции $f(z) = \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^4+16}$ и области $|z| < n + \frac{1}{2}$.)

7. Вычислить интеграл от функции f по границе области D:
(a) $f(z) = \sin(\frac{z}{z+1})$, $D = \{|z| > 3\}$,
(b) $f(z) = \frac{z}{z+3}\exp(1/(3z))$, $D = \{|z| > 4\}$.

8. Вычислить интегралы:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\,e^{ix}}{x^2 - 2x + 2}\,dx, \quad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\cos x}{x^2 + 2ix - 2}\,dx.$$

9. Вычислить интеграл (применить теорему о вычетах к подходящей полосе и воспользоваться периодичностью экспоненты):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{a\,x}}{e^x + 1}\,dx,\ 0 < \operatorname{Re} a < 1.$$