Листок № 8

1. Пусть f_n – последовательность функций, голоморфных в области D, сходящаяся (равномерно на компактах) к функции f. Пусть множество нулей f в D непусто. Доказать, что существует N, т.ч. для $n > N$ множество нулей f_n непусто.

2. Сколько полных аналитических функций задает формула:

$$(a)\ \sqrt{z^2},\quad (b)\ \sqrt{z}+\sqrt{z},\quad (c)\ \log(z)+\log(z),\quad (d)\ \arcsin(z)+\arccos(z).$$

3. (Задание к картинке ниже.) В пунктах (a)-(d) доказать, что в области D полная аналитическая функция f, заданная формулой, распадается на однозначные ветви. А также для ветви $\varphi(z)$, заданной значением в точке a, найти значение в точке b.

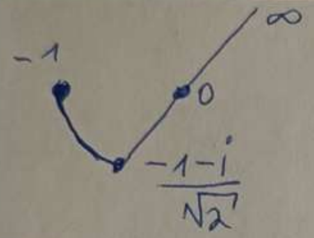
В задачах 4-9 требуется охарактеризовать все особые точки функции, заданной формулой на сфере Римана:

$$4.\quad \sqrt{1+\sqrt{z}}, \qquad 5.\quad \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{z}}},$$

$$6.\quad \sqrt{\exp(\mathrm{arctg}(z))}, \qquad 7.\quad \log\left(\frac{z-5}{\sin^3(z)-1}\right),$$

$$8.\quad \log\left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right), \qquad 9.\quad \frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z(1-z)}}.$$

A

D: 

$f = \sqrt{\pi^2 + \ln^2 z}$

$\varphi(1) = \pi$

$\varphi(i) = ?$

B

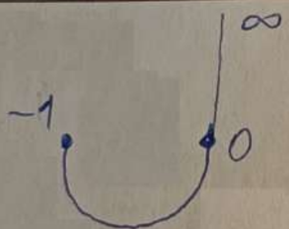
D: 

$f = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)$

$\varphi(0) = 0$

$\varphi\left(\frac{5i}{3} + 0\right) = ?$

c

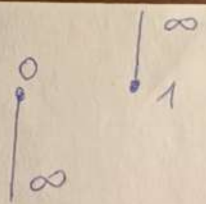
D: 

$f = \sqrt{1 + \sqrt{z+1}}$

$\varphi(8) = 2$

$\varphi\left(-\frac{3}{4}\right) = ?$

d

D: 

$f = \ln(\ln z)$

$\varphi(e^2) = \ln 2$

$\varphi(-e^{\pi}) = ?$