Анализ Фурье в теории чисел.
Листок 1

Задача 1. Пусть $u_n = \ln n$. Докажите, что u_n не является равномерно распределенной по модулю 1. Найдите

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\left|\sum_{n\le N} e(ku_n)\right|.$$

Задача 2. Докажите, что последовательность $u_n = n^\alpha$ равномерно распределена по модулю 1 для всех $0 < \alpha < 1$.
Задача 3. Напомним, что

$$V_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n}{N+1}-\frac{1}{2}\right)\Delta_{N+1}\left(x-\frac{n}{N+1}\right)+\frac{1}{2\pi(N+1)}\sin 2\pi(N+1)x-\frac{1}{2\pi}\Delta_{N+1}(x)\sin 2\pi x,$$

$$\Delta_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin \pi N x}{\sin \pi x}\right)^2, B_N(x) = V_N(x) + \frac{1}{2(N+1)}\Delta_{N+1}(x).$$

Докажите, что при $\frac{N+1}{2} < r \le N$ выполнено

$$B_N''\left(\frac{r}{N+1}\right) > 0,$$

тем самым завершив доказательство неравенства $B_N(x) \ge s(x)$.
Задача 4.
Пусть

$$H(z) = \frac{\sin^2 \pi z}{\pi^2}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sgn}(n)}{(z-n)^2}+\frac{2}{z}\right), K(z) = \frac{\sin^2 \pi z}{\pi^2 z^2}, E(x) = H(x) - \mathrm{sgn}(x).$$

Докажите, что для вещественных x справедливы неравенства $|H(x)| \le 1$ и $|E(x)| \le K(x)$.
Задача 5.
Пусть $J(z) = \frac{1}{2}H'(z)$. Докажите, что

$$\widehat{J}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t = 0 \\ \pi t(1-|t|)\mathrm{ctg}(\pi t) + |t|, \text{ если } 0 < |t| < 1 \\ 0, \text{ если } |t| \ge 1. \end{cases}$$

Покажите, что $\widehat{E}(t) = \frac{\widehat{J}(t)-1}{\pi i t}$.

Задача 6.
Примените формулу суммирования Пуассона к $(N+1)E\left(\frac{t}{N+1}\right)$ и покажите, что полином

$$s^*(x) = -\sum_{1\le|n|\le N} \frac{\widehat{J}\left(\frac{n}{N+1}\right)}{2\pi i n} e(nx)$$

удовлетворяет неравенству

$$|s(x) - s^*(x)| \le \frac{1}{N+1}\Delta_{N+1}(x).$$