Анализ Фурье в теории чисел.
Листок 2

Задача 1.
Пусть $\mathcal{H}$ — множество натуральных чисел. Напомним, что

$$\alpha = \sup_{u \in U} \limsup_{N \to +\infty} D_u(N),$$

где U — множество всех последовательностей u_n таких, что $u_{n+h} - u_n$ равномерно распределено $\mod 1$ для всех $h \in \mathcal{H}$. Кроме того,

$$\beta_\infty = \sup_{\mathcal{Y}_\infty} \limsup_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n \le N} y_n \right|,$$

где $\mathcal{Y}_\infty$ — множество таких последовательностей y_n, что $|y_n| \le 1$ и $\sum_{n \le N} y_{n+h} \overline{y_n} = o(N)$ для всех $h \in \mathcal{H}$. Докажите, что

$$\alpha \ll \beta_\infty \log \frac{2}{\beta_\infty}.$$

Задача 2.
Пусть $\mathcal{H}$ — множество ван дер Корпута. Пусть A — подмножество натуральных чисел такое, что $\mathcal{H}$ и $A - A$ (то есть множество всех попарных разностей элементов A) не пересекаются. Докажите, что A имеет плотность 0, то есть $|A \cap [1, N]| = o(N)$ при $N \to +\infty$.
Задача 3.
Пусть

$$S_N(\alpha) = \sum_{n \le N} e(2^n \alpha).$$

Найдите

$$\int_0^1 |S_N(\alpha)|^4 d\alpha.$$

Получите асимптотическую формулу для

$$\int_0^1 |S_N(\alpha)|^{2k} d\alpha$$

для всех натуральных k. Что получится, если взять $k = 1/2$?
Задача 4.
Назовём число α нормальным по основанию 2, если последовательность $2^n \alpha$ равномерно распределена. Докажите, что множество чисел, не нормальных по основанию 2, имеет меру 0.
Указание: Пользуясь предыдущей задачей и леммой Бореля-Кантелли, докажите, что $S_N(\alpha) = o(N)$ для почти всех α.
Задача 5.
Найдите

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \le N} \left\{ \frac{N}{n} \right\}$$