Анализ Фурье в теории чисел.
Листок 3

Задача 1.
Пусть $\Delta(x)$ — остаток в проблеме делителей Дирихле. Напомним, что

$$\Delta(x) = -2 \sum_{n \le \sqrt{x}} s(x/n) + O(1)$$

Докажите, что если (k, l) — экспоненциальная пара, то

$$\Delta(x) \ll x^{(k+l)/(2k+2)} \ln x.$$

Установите, что $\Delta(x) = O(x^{27/82})$.
Задача 2.
Пусть $r_2(n)$ — число представлений n в виде суммы двух квадратов целых чисел. Воспользовавшись классической формулой

$$r_2(n) = 4 \sum_{d | n, 2 \nmid d} (-1)^{(d-1)/4}$$

докажите, что

$$\sum_{n \le x} r_2(n) = \pi x + P(x),$$

где

$$P(x) = 4 \sum_{d \le \sqrt{x}} \left(s\left(\frac{x}{4d+1}\right) - s\left(\frac{x}{4d+3}\right) + s\left(\frac{x-3}{4d}\right) - s\left(\frac{x-1}{4d}\right) \right) + O(1).$$

Какие оценки для $P(x)$ получаются при помощи экспоненциальных пар?
Задача 3.
Пусть $P(n)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что для всех натуральных N, q существует целое h такое, что

$$\left| \sum_{n=1}^{N} e\left(\frac{P(n) + hn}{q}\right) \right| \ge \frac{N}{\sqrt{q}}.$$

Задача 4.
Пусть $\mu(\sigma)$ — точная нижняя грань таких μ, что

$$\zeta(\sigma + it) = O(t^{\mu})$$

при $|t| \ge 1$. Докажите, что $\mu(\sigma)$ — выпуклая функция.
Указание: Пусть $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, $l(s)$ — аффинно-линейная функция с условием $l(\sigma_i) = \mu_i$. Рассмотрите

$$f_{\varepsilon,\delta}(s) = \exp(\varepsilon i s - (l(s) + \delta) \ln(-is))$$

и примените принцип максимума к $f_{\varepsilon,\delta}(s)\zeta(s)$.

Задача 5.

а) Докажите, что всякое целое число является суммой пяти кубов целых чисел.

б) Пусть $G(k)$ — наименьшее G, для которого все достаточно большие натуральные числа представимы в виде суммы G $k-$ых степеней натуральных чисел. Докажите, что $G(k) \geq k+1$.

в) Усильте эту оценку для $k = 2^m$.

Задача 6.
Пусть $\Lambda(n) = \ln p$ при $n = p^k$ и 0 иначе,

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

а) Докажите, что $\exp(\psi(N))$ — наименьшее общее кратное всех натуральных чисел, не превосходящих N.

б) Пусть $P(u)$ — полином степени $d > 0$ с целыми коэффициентами. Докажите, что

$$\int_0^1 P(u)^{2N} du \geq \exp(-\psi(2dN+1)).$$

в) Выбрав $P(u) = (u^2 - u)^2(1 - 2u)$, докажите, что при $x \geq 2$ выполнено

$$\psi(x) \geq \frac{\ln 5}{2} x + O(\ln x)$$