

Листок 11
ГЕОМЕТРИЯ
Проективная геометрия-II

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 3 задачи. Задачи со звёздочкой приравниваются к двум задачам без звёздочки.

1. Даны пять различных коллинеарных точек A, B, C, D, E . Докажите, что

$$\langle A, B, C, D \rangle \cdot \langle A, B, D, E \rangle \cdot \langle A, B, E, C \rangle = 1.$$

2. (Корректность определения двойного отношения четырёх коллинеарных точек $\mathbb{R}P^2$)
Дана четверка прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что двойное отношение 4 точек, высекаемых исходными прямыми на еще одной прямой, не зависит от выбора этой вспомогательной прямой.

3. Запишите уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, параболы $y = x^2$ и окружности $x^2 + y^2 = 1$ в однородных координатах и найдите все их точки на бесконечности.

4. Укажите какое-нибудь проективное преобразование, переводящее окружность $x^2 + y^2 = 1$ в параболу $y = x^2$. Единственно ли оно?

5. Опишите группу, действующую на грассманиане как некоторую группу классов эквивалентности матриц. Эта группа должна превращаться в группу, действующую на $\mathbb{R}P^n$, в случае, когда грассманиан совпадает с проективным пространством.

6*. Введите аналог однородных координат на грассманиане. Эти координаты должны совпадать с однородными координатами на $\mathbb{R}P^n$ в случае, когда грассманиан совпадает с проективным пространством.