Листок 12
ГЕОМЕТРИЯ
Кривизна кривых и поверхностей в $\mathbb{E}^3$

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 4 задачи.

1. Выведите формулы Френе для кривой в трёхмерном евклидовом пространстве.

2. (а) Докажите, что кривизна кривой не зависит от выбора натуральной параметризации.
(б) Докажите, что если кривизна кривой в $\mathbb{E}^2$ или $\mathbb{E}^3$ равна нулю, то это прямая.
(в) Докажите, что если кручение кривой равно нулю, то эта кривая плоская.

3. (а) Докажите, что кривизна плоской или пространственной кривой γ, запараметризованной произвольным параметром t, может быть найдена по формуле

$$k(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}.$$

(б) Докажите, что кручение кривой в $\mathbb{E}^3$ можно вычислить по формуле

$$\kappa(t) = \frac{(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}.$$

В числителе стоит *смешанное произведение* трёх векторов. Для векторов $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ оно вычисляется как $(a, b, c) := a \cdot (b \times c)$.

4. Докажите, что средняя кривизна поверхности в $\mathbb{E}^3$ есть интегральное среднее всех кривизн со знаком $k(\varphi)$ нормальных сечений

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi)\, d\varphi.$$

5. (а) Докажите, что нулевыми гауссовой и средней кривизнами – кусок плосокости.
(б) Докажите, что если на двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$ через каждую точку проходят три различные прямые, целиком лежащие на этой поверхности, то она – кусок плоскости.
(в) Докажите, что гауссова кривизна минимальной поверхности неположительна, а единственной минимальной поверхностью с нулевой гауссовой кривизной является плоскость.

6. Докажите, что средняя и гауссова кривизны поверхности связаны между собой отношением $H^2 \geqslant 4K$. Опишите точки, в которых $H^2 = 4K$. Такие точки называются *омбилическими*. Классифицируйте все поверхности в $\mathbb{E}^3$, у которых каждая точка является омбилической (такие поверхности называются *омбилическими*).