

**Листок 2**  
**ГЕОМЕТРИЯ**

**Конечные подгруппы  $O(3)$ , платоновы тела**

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 4 задачи. Каждый пункт в задаче 1 рассматривается как отдельная задача. Из задачи 1 только один из пунктов пойдёт в зачёт. Чтобы сдать задачу 4 нужно решить все пункты. Задача со звездочками засчитывается как обычная задача.

**1.** В сферу  $S^2$  вписана

а) (1) правильная шестиугольная пирамида; (2) двойная правильная шестиугольная пирамиды (т.е. объединение двух правильных шестиугольных пирамид с общим основанием и вершинами в полюсах сферы);

б) (1) правильная шестиугольная призма; (2) правильная пятиугольная усеченная пирамида.

Найдите группу симметрий (т.е. изометрий) этой фигуры и ее группу движений. Как соотносится ответ с теоремой о конечных подгруппах в  $SO(3)$ ?

**2.** а) Докажите, что прямоугольник, две противоположных стороны которого представляют собой два противоположных ребра правильного икосаэдра, является «золотым прямоугольником», т.е. его стороны находятся в отношении  $(1 + \sqrt{5})/2$ . Число  $\varphi := (1 + \sqrt{5})/2$  называется *золотым сечением*.

б) Убедитесь, что 12 точек  $(\pm\varphi, \pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm\varphi, \pm 1)$ ,  $(\pm 1, 0, \pm\varphi)$  расположены в вершинах правильного икосаэдра (в частности, икосаэдр действительно существует). Выведите отсюда также существование додекаэдра.

**3.** Докажите, что если правильный многогранник имеет символ Шлефли  $\langle p, q \rangle$ , то  $1/p + 1/q > 1/2$ . Выведите отсюда, что любой правильный многогранник – одно из 5 платоновых тел.

**4.** а) Докажите, что сумма углов выпуклого многогранника в  $\mathbb{E}^3$  равна  $2\pi(P - \Gamma)$ .

б) Докажите, что сумма углов выпуклого многогранника в  $\mathbb{E}^3$  равна  $2\pi(V - 2)$ .

в) Докажите теорему об эйлеровой характеристике выпуклого многогранника в  $\mathbb{E}^3$ .

г) Верна ли теорема об эйлеровой характеристике для невыпуклых многогранников в  $\mathbb{E}^3$ ? Если да, то докажите её, если нет, то постройте контрпример.

**5.** Существует ли в группе движений куба подгруппа, изоморфная группе движений правильного тетраэдра?

**6.** Существует ли в группе движений додекаэдра подгруппа, изоморфная группе движений куба?

**7.** В группе движений куба найдите все подгруппы, изоморфные группам  $\mathbb{Z}_n$  и  $\mathbb{D}_n$  для всевозможных значений  $n$ . Есть ли в ней еще какие-либо подгруппы?

**8\*\*\*.** Придумайте определение двойственного многогранника для произвольного (не обязательно выпуклого!) многогранника. Ваше определение должно давать определение выпуклого многогранника для платоновых тел.