Листок 6
ГЕОМЕТРИЯ
Инверсии, модель Пуанкаре плоскости Лобачевского в круге

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 6 задач. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать нужно решить все пункты.

1. (a) Докажите, что инверсия отображает окружности и прямые в окружности или прямые.

(b) Докажите, что инверсия конформна (т.е. мера угла между двумя прямыми и их образами совпадает).

2. (a) Докажите, что инверсия отображает в себя любую окружность, ортогональную окружности инверсии.

(b) Докажите, что инверсия относительно окружности, ортогональной данной окружности $\mathcal{C}$, биективно отображает на себя круг, границей которого является $\mathcal{C}$.

3. Докажите, что если точка P лежит вне окружности C, а A, B — точки пересечения этой окружности с прямой l, проходящей через P, то произведение $|PA| \cdot |PB|$ (которое тоже называется *степенью точки P относительно C*) не зависит от выбора прямой l.

4. Докажите, что на плоскости Лобачевского существует ровно один общий перпендикуляр, соединяющий две непересекающиеся прямые.

5. Докажите, что любая евклидова окружность внутри модели на круге является и гиперболической окружностью. Совпадает ли ее обычный (евклидов) центр с ее "гиперболическим центром"?

6. (a) Докажите, что отображение римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ в себя, определённое как $z \to \frac{1}{\bar{z}}$, задаёт инверсию относительно единичной окружности с центром в начале координат.

(b) Выведите формулу для инверсии относительно произвольной окружности на сфере Римана.

7. Докажите, что любая инверсия римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ сохраняет *двойное отношение четырех точек на плоскости*:

$$\langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

8. Докажите, что гиперболическая геометрия однородна в том смысле, что для любых двух флагов (т.е. полуплоскостей с отмеченной точкой на границе) существует изометрия, переводящая один флаг в другой.

9. Определите инверсию в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ (относительно сферы). Сформулируйте и докажите ее основные свойства: инверсия переводит плоскости и сферы в плоскости или сферы; любую сферу, ортогональную сфере инверсии, — в себя; любую плоскость, проходящую через центр инверсии, — в себя.

10. Используя предыдущую задачу, докажите, что любая инверсия в пространстве $\mathbb{E}^3$ конформна.

11. Постройте модель гиперболического трехмерного пространства в открытом единичном шаре.

12. Пусть $A_\infty P$ и $A_\infty P'$ — параллельные прямые (где A_∞ — точка на абсолюте), M — произвольная точка на $A_\infty P$. Будем говорить, что точка $M' \in A_\infty P'$ *соответствует* точке M, если углы $A_\infty M M'$ и $A_\infty M' M$ равны. Докажите, что любой точке $M \in A_\infty P$ соответствует единственная точка на прямой $A_\infty P'$.

13. Геометрическое место всех точек, соответствующих точке M на прямой $A_\infty P$ и лежащих на прямых, параллельных $A_\infty P$, называется *орициклом*. Как выглядят орициклы в модели Пуанкаре в круге?

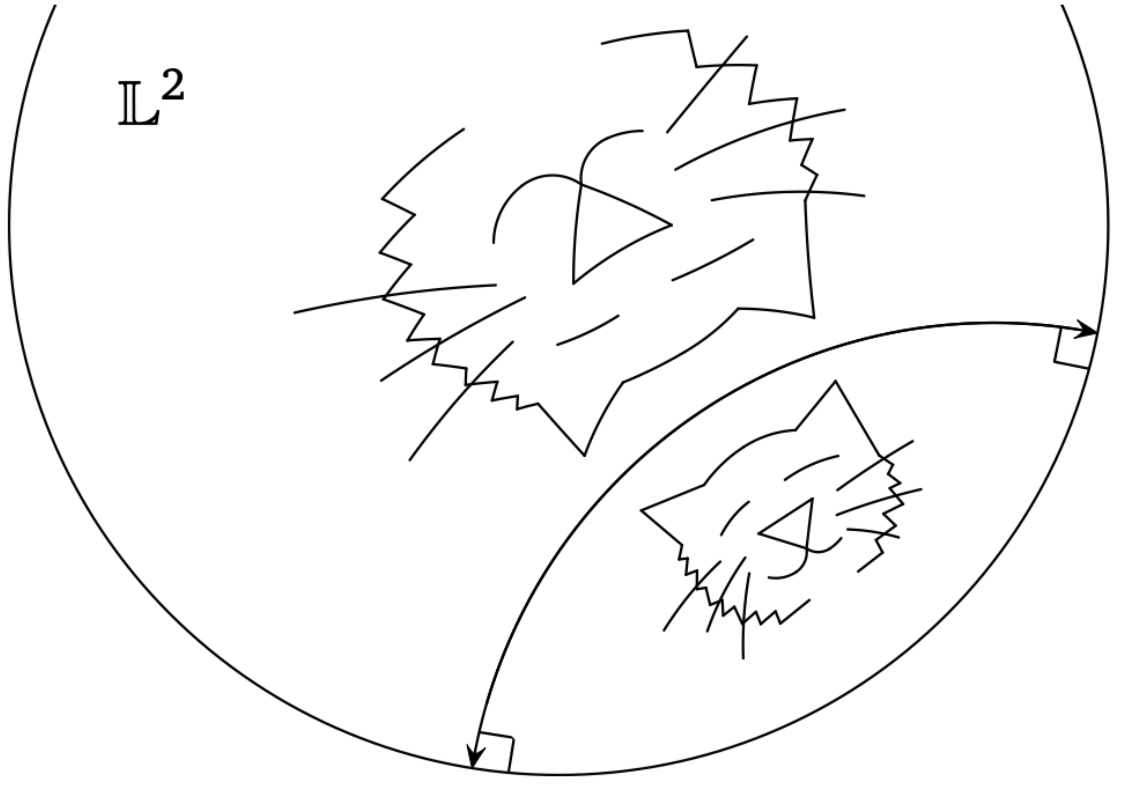

Рис. 1. Отражение плоского кота относительно прямой на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в круге.