Листок 1, 2 сентября 2024 г.

Задача 1. Докажите, что всякая конечная циклическая группа изоморфна $\mathbb{Z}/nZ$ для некоторого $n \geqslant 1$. Докажите, что всякая бесконечная циклическая группа изоморфна $\mathbb{Z}$.

Задача 2. Опишите все подгруппы циклической группы.

Задача 3. Приведите пример бинарной операции на множестве, удовлетворяющей всем аксиомам группы, кроме:

1. ассоциативности;
2. существования единицы и обратного элемента;
3. существования обратного элемента.

Задача 4. Докажите, что симметрическая группа S_n неабелева при $n \geqslant 3$.

Задача 5. Докажите, что все корректные способы расстановки скобок в произведении $g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$ задают один и тот же элемент (полу-)группы.

Задача 6. Пусть G – группа, и пусть для любого ее элемента g выполнено $g^2 = e$. Докажите, что G абелева. Верно ли, что G абелева, если для любого элемента $g \in G$ выполнено $g^3 = e$?

Задача 7. *Автоморфизмом* называется изоморфизм группы (или полугруппы, или моноида) на себя. Покажите, что автоморфизмы образуют группу. Опишите все автоморфизмы и все подгруппы в следующих группах: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, S_3, S_4.

Задача 8. Автоморфизм ϕ группы G называется внутренним, если для некоторого фиксированного $h \in G$ и для любого $g \in G$ выполнено $\phi(g) = hgh^{-1}$. Приведите пример группы G, обладающей автоморфизмом, не являющимся внутренним.

Задача 9. Пусть n и m – целые положительные взаимно простые числа. Постройте изоморфизм групп $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$.

Задача 10. Классифицируйте с точностью до изоморфизма все группы G такие, что G содержит не более 6 элементов.

Задача 11. Назовем множество элементов $\mathcal{H} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ группы G *порождающими*, если каждый элемент из G можно записать в виде произведения элементов из $\mathcal{H}$ и обратных к ним. Будем говорить, что G *конечно порождена*, если множество $\mathcal{H}$ можно выбрать конечным. Является ли группа $\mathbb{Q}$ конечно порожденной?

Задача 12. Элемент симметрической группы S_n, то есть группы биекций n-элементного множества X, называется *транспозицией*, если он меняет местами два элемента X, а остальные элементы X оставляет на месте. Покажите, что транспозиции порождают S_n.

Задача 13. Верно ли, что всякая подгруппа H в прямом произведении групп $G_1 \times G_2$ имеет вид $H_1 \times H_2$, где H_i это подгруппа в G_i для $i = 1, 2$?

Задача 14. ("Обращение теоремы Лагранжа") Пусть n делится на m. Может ли в группе порядка n не быть подгруппы порядка m?

Задача 15. (Для тех, кто уже умеет умножать матрицы). Модулярной группой назовем множество матриц

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$$

с операцией умножения. Проверьте аксиомы группы. Докажите, что модулярная группа порождается матрицами

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$