Листок 10, 18 ноября 2024 г.

Задача 1. Положим $q = p^n$. Докажите, что поле $\mathbb{F}_q$ имеет единственное расширение степени n. Докажите, что $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbb{F}_{p^n}$.

Задача 2. Опишите все автоморфизмы поля $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$. Опишите все автоморфизмы поля $\mathbb{F}_{q^n}$ над $\mathbb{F}_q$, где $q = p^n$.

Задача 3. Опишите все автоморфизмы поля $\mathbb{R}$. Конечно ли множество автоморфизмов поля $\mathbb{C}$?

Задача 4. Докажите, что расширение полей степени 2 нормально. Докажите, что расширение полей $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$ не нормально.

Задача 5. Пусть $F \subset K \subset L$ – башня полей, и L/F нормально. Докажите, что L/K нормально. Приведите пример башни полей $F \subset K \subset L$, в которой K/F и L/K нормальны, но L/F не нормально.

Задача 6. Найдите степень расширения $[L : \mathbb{Q}]$, где L – поле разложения многочлена $x^4 - 2$; $x^p - a$, где p – простое.

Задача 7. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}$ – корень из 1 степени n. Найдите $[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}]$. Докажите, что $\mathbb{Q}[\zeta]/\mathbb{Q}$ нормально. Найдите $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[\zeta]/\mathbb{Q})$.

Задача 8. Пусть $f(x) = x^p - x - a$, $a \in K$, $\operatorname{char} K = p$. Докажите, что $f(x+1) = f(x)$. Докажите, что либо f неприводим, либо раскладывается на линейные множители. Если f неприводим, покажите, что $\mathrm{Aut}(L/K) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где $L = K[x]/f(x)K[x]$.